{Seneca}

Tratado 2.º

De la Geometria. Especulativa.

Es la Geometria una de las partes mas principales de la Mathematica, como se ha dicho en la Introduccion del Curso: Esta voz Geometria, quiere decir, segun su Etimologia, Ciencia que trata de las Medidas de las figuras; pero en el comun decir, es mucho mayor su Estenzion; pues tiene por Objeto la Cantidad Continua; esto es todo Aquello, que es Mensurable, como son Lineas, Superfizies, Solidos, ó Cuerpos; Dividese la Geometria, en Especulativa y Practica

La 1.a averigua las propiedades dela Cantidad continua; y la 2.a Enseña el modo de Executar sus operaziones, sobre terreno.

La Geometria Especulatiua, se Comprehende en los 15 Libros, que ordenó Euclides, casi 300 años antes dela venida de Christo, y como sea Combeniente emplear el tiempo en lo mas Util, se Explicaran en este tratado los 6 primeros Libros, q.e pertenezen al Conocimiento delas superfizies, y el 11 y 12 que tratan delos solidos.

Libro 1.o

Definiziones.

Punto, es el q.e no tiene parte Alguna.

No tiene partes el punto por que el Entendimiento lo Considera Indiv sible; y como cosa, que no siendo Cantidad, se termina el asi mismo.

Definizion 2.ª

Linea, es una Longitud, sin Latitud, ni profundidad alguna; produzese, por el movim.to de un punto de un lugar à otro; como si el punto A se moviese hasta el punto B; la distancia, que andaria, se llama Linea, y lo seria la AB.

Definizion 3.ª

Los Extremos dela Linea, se Consideran Como puntos.

Dividese la Linea en Recta, y Curba.... Defin.n 4.ª........

Linea Recta es la mas breve distancia entre dos puntos; y qualq.ra otra se llama Curva.

Defin.n 5.ª.. Superfizie, es la que Consta de dos dimensiones, Longitud y Latitud, como AD; produzese por el Movimiento de una de sus Lin.s sobre otra, conservdo. siempre la misma ynclinazn.

~~Esto~~ es, si la Linea AB se moviese conservando su Inclinazion con la Linea AC, se moviese sobre ella, formaria la superfizie ABCD.

Definizion 6.a

Los extrem.s de la superfiz.e son Lineas. Dividese la superf.e en plana, y curba.

Definizion 7.a

Superfizie plana; es la que esta, ygualmente estendida entre sus lin.s extremas o aquella q.e por todas partes, puede ajustarse vna linea recta; qualq.a otra es Curva.

Definizion 8.a

Angulo plano: es la ynclinazn. de dos lineas q.e estando en vn mismo plano concurren en vn punto: como si la Linea CA, cayendo ynclinada sobre la AB la Inclinaz.n que forma con ella sera el ang.o CAB.

Dividese el angulo por razon de las Lineas, que le forman, en Rectilineo; Curvilineo; y Mixtilineo.

Definizion 9.

Angulo Rectilineo; es el que forman dos lineas Rectas; como BAC: Curvilineo, es el formado, por dos lineas Curvas, como Z; y Mixtilineo; el formado por una linea Recta, y otra Curva como X.

Definizion 10.

Quando una Linea Recta Cayendo sobre otra, haze los Angulos, de una y otra parte yg.s entre si; estos Angulos, se llaman Rectos, y la Linea perpend.r sobre la otra: de modo, que si la Recta CD, Cae sobre la AB formando con ella los ang.s EDA, CDB yguales; estos angu.s,

Seran Rectos; y la CD sera perpendi=
cular ala AB; pero si sobre AB, Caie=
se la ED formando ang.s desyguales
Estos angulos se llaman Obliq.s

Definizion 11.

Angulo Obtuso; es el que es=
maior que Recto como EDA.

Definizion 12.

Ang.o agudo es el q.e es ∠ q. Recto co=
mo EDA.

Et ser un angulo maior, que
Otro, no consiste en que los Lados
que le forman sean maiores, ô menores
sino en la maior, ô menor Abertura
de ellos; de suerte que un ang.o sera
siempre el mismo, aunque las Lineas
que le formen se alarguen quanto
quieran, por que siempre tendra la
misma ynclinazion, ô Abertura.

Definizion 13. terminos

es el fin, ô termino de vna Cantidad

Definizion 14.

figura es la que esta Cerrada con vno, ô muchos termin.^s; y asi el angulo no es figura p.^r estar Abierto.

Definizion 15.

Circulo, es vna figura plana, terminada Con vna linea Curva, llamada Circunferencia, distante ygualm.^te por todas partes, de vn punto q.^e tiene en el medio, del qual todas las lineas, que salen, y se terminan en la Circunfer.^a son yg.^s entre si; como CA. CB. &^a.

Definizion 16.

El punto de enmedio C se llama Centro, y las Rectas, q.^e salen del, y se terminan en la Circunferencia como CA, CD, CE, &^a. se dizen Radios, ô semidiametros.

Definizion 17. Diametro del

Circulo, es vna linea recta que passando por el Centro C, se termina por ambas partes dela Circunfereª, y divide al Circulo en dos partes, yguales; tal es la recta ACB.

Definizion 18.

Semicirculo; es vna figura terminada por el diametro, y la mitad dela Circunferenzia; tal es ACBD.

Scholio.

La Medida del Angulo es el Arco del Circulo, que se ymagina descripto del punto del Concurso delas Lineas, como Centro, y se termina en dichas dos Lineas; assi la medida del Angulo ECB sera el Arco FB descripto con el Centro C.

Para este y otros fines se suele dividir el Circulo; ò bien su Circunferencia en 360 partes yguales que se llaman Grados; Cada Grado en 60 minutos; Cada minuto en 60 Segundos; y si fuere nezesario, Cada segundo en 60 terzeros; Estos Grados son los que Expresan el Valor delos Angulos; de suerte que siendo el Arco EB por Exemplo de 60 Grados; se dira que el Angulo ECB, es de 60 Grados.

Constando el Circulo Entero de 360 Grados, el semicirculo sera de 180; y la quarta parte del Circulo, que suele llamarse <u>Quadrante</u>, sera de 90 grados, y este es el Valor del Angulo recto: El Valor del Angulo agudo, sera menor de 90 grados, y mayor el Angulo Obtuso; porque el uno es $<$ y el otro es $>$ que el Ang.º recto.

Definizion 19.

figuras Rectilineas, son las q.e estan

terminadas por lineas Rectas como BC. . figuras trilateras, ó triangulos, son las que estan terminadas por tres Lineas Rectas.

Definizion 21.

figuras Quadrilateras, son las terminadas pr. quatro Lineas Rectas.

Definizion 22

figuras Multilateras; son las terminadas pr. muchas lineas Rectas.

Las figuras trilateras, ó triangulos se dividen por razon de sus Lados en Equilateros; Isozeles; y Escaleno.

Definizion 23

triangulo Equilatero; es el qe tiene sus tres Lados Iguales, como ABC.

Definizion 24.

triangulo Isozeles; es el que tiene dos Lados Iguales, como

CDH.

Definizion 25.

triangulo Escaleno: es el que tiene sus tres lados desiguales; como EFY.

Los triangulos por razon de sus Angulos, se dividen, en Rectangulo; Obtusangulo; y Acutangulo.

Definizion 26.

triangulo Rectangulo; es el q.e tiene uno de sus Angulos Recto: como IRM

Definizion 27.

triangulo Obtusangulo; es el que tiene uno de sus Angulos obtuso: como NOS.

Definizion 28.

triangulo Acutangulo es el q.e tiene sus tres ang.s ag.s como PQT.

Definizion 29.

Quadrado; es una fig.a Quadrilatera

que tiene sus quatro lados yg.s y los quatro Angulos Rectos; como ABCD.

Definizion 30.

Quadrilongo: es el que tiene todos sus angulos Rectos; pero no los quatro Lados yguales; sino solo los opuestos; como EFGH.

Definizion 31.

Rombo; es el que tiene sus quatro Lados yguales; pero ningun Angulo Recto; como ILMN.

Definizion 32.

Lineas Rectas Paralelas; son aquellas, que aunque se prolonguen al infinito, se conservan siempre Equidistantes: Como VX. ST.

Definizion 33.

trapezio; es una fig.a Quadrilat.ra, que tiene solam.te dos de sus Lados opuestos Paralelos: Como OPQR.

trapezoyde: es el Quadrilatero, en quien ningunos lados son Paralelos.

Definizion 34.

Paralelogramo: es vna figura Quadrilatera; Cuios Lados Opuestos son paralelos.

Definizion 35.

Quando en vn Paralelogramo, se tira vna Recta alos angulos opuestos como DB; esta se llama Diametro, ô Diagonal; y si por vn punto de ella Como O, se tiran paralelas alos Lados: esto es c,d, â CB, y ab, â AB; los paralelogs. por quienes pasa la Diagonal; que son aocd, y dbco, se llaman al Rededor dela Diagonal; y los otros ao, oc, sus Complem.tos

Peticiones, ô Postulad.s

1.º Pidese tirar vna linea Recta de vn punto â otro.

2.º Alargar vna linea Recta, quanto se quisiere.

3.º Describir vn Circulo con qualquier Centro, y con qualquiera Abertura de Compas.

Axiomas.

1.ª... Las Cosas, que son yguales à otras, son yguales entre si.

2.ª... Si à Cosas yguales, se añaden yguales; Las sumas seran yguales.

3.ª... Si de Cosas yguales se quitan yguales; los Residuos quedaran yguas.

4.ª... Si à Cosas ygs. se añaden, ò quitan desyguales; las sumas, o Residuos, seran desyguales.

5.ª... Si Cosas yguales se multiplican, ò parten por yguales los productos ò Cocientes, seran yguales.

6.ª... Si cosas ygs. se multiplican ò Parten por desyguales, los pro-

Rectos, ó Corrientes, seran Yguales.

7ª... Las Cosas q.e son duplas, triplas de Cantid.s Yguales; son Yguales.

8ª... Las Cosas, que son mitades, tercios, de Cant.s Yguales; son Yguales.

9ª... El todo es Ygual á sus part.s juntas

10... Las Cosas q.e se ajustan Exactam.te son totalm.te Yguales: y siendo totalmente Yg.s; se ajustan Exactam.te

11... todos los Angulos Rectos son Yguales entre si.

12... todas las Lineas terminadas entre dos paralelas; siendo perpendic.s a ellas, seran Yguales entre si (Esta Axioma, viene á ser Corolario de la Definizion 32)

13... Dos Lineas Rectas, no pueden Cerrar Espazio; y p.r consig.te, si se ajustan sus Extremos; tambien las Lineas se ajustaran Exactam.te

14... Dos lineas rectas, no pueden tener un segmento comun solo se cortan en un punto.

Propos.n 1.a Probl.a

Sobre una recta dada y terminada, como AB; formar un triang.o Equilatero.

Operazion

Tomese la distancia AB y haziendo centro en A, descrivase un arco; con la misma distancia, haz.do centro en B, descrivase otro arco, que cortara el 1.o en el punto C; y tirando a este punto las rectas AC, BC sera el triangu.o ABC, el que se pide.

Demostraz.n

Las rectas AB, AC son yg.s, p.r la (defin.n 15) tambien lo son AB, y BC: luego (Axi.1.a) todas tres rectas seran yg.s entre si; y (def.n 23) el triang.o ABC, sera Equilat.o

Propos.n 3.a Probl.a

Dadas dos Rectas desyguales; Cortar delaMayor una parte ygual ala menor.

Operazion.

Supuesto que la Recta Mayor sea CED; y la menor AB: con el Interv.o de esta, haziendo Centro en C; se Cortara la CD en el Punto E; y esta parte sera (por la definizion 15) ygual ala Recta menor AB.

Propos.n 4.a theore.

Si dos triangulos ABC, DEF, tienen el Lado AC ygual al Lado DE: el Lado CB ygual FE; y los Ang.s Comprehendidos de dichos Lados C, y E son tambien yguales; Los triangulos seran tambien totalmente yguales; esto es la Base AB sera ygual alaBase DF, y los ang.s A, B, ygu.s a sus Correspondientes D, F.

Para ser dos triangulos totalmente yguales; es preciso que todos los Lados, y Angulos del uno, sean yguales á todos los Lados, y angulos del otro; Cada uno á su Correspondiente aunque para que dos triangulos, se an yguales, basta solamente, el que sus superfizies lo sean; y en este Caso pueden ser los angulos, y lados desyguales; Esto supuesto digo que dichos triangulos ABC, DEF, son totalmente yguales.

Demostrazion.

Considerese el triangulo DEF, se pone sobre el triangulo ABC, y siendo el Lado DE ygual al Lado AC se ajustaran exactamente; de suerte que el punto D caera sobre el punto A; y el punto E sobre el punto C: siendo tambien el Lado CB ygual al Lado EF,

Caera el Lado FE sobre el Lado CB;
y por que estos Lados son yguales
se ajustaran Exactamente; y el
punto F vendra à Caer sobre el pun
to B: Con lo qual teniendo los Lados
ô Rectas AB, DE ajustados sus Exa
tes
se ajustaran ellas tambien Exactam,
(por la ax.ª 13) luego (ax.ª 10) dichos
triangulos, son totalmente yguales.

Propos.ⁿ 5 theore.ª

En el triang.º Isozeles, los Angulos
sobre la base son yguales, como tam
bien los que se forman debaxo dela
base, alargados alos Lados ygs.

Explicazion.

Sea el triangulo Isozeles ABC, y los
Lados yguales sean AC, y BC: digo qe.
los Angulos sobre la base CAD, y
CBD, son ygs. como tambien los de, de
baxo dela base DAE. DBF.

Preparazion.

Considerese, que la Recta CD, divide pr. medio el Angulo del Vertize C.

Demostrazion.

Los triangulos ACD, CDB tienen el lado AC ygual CB; y el Angulo ACD, y DCB uno y otro por suposizion; y el lado CD Comun (luego prop.n 4) son totalmente yguales; y por Consiguiente el Angulo CAD ygual DBC, que era lo primero.

Lo 2.º siendo dichos triangulos totalmente yguales, se ajustaran exactamente; de modo que el Lado AD, caera sobre el Lado DB; y CA sobre CB; ô bien prolongados estos Lados; CE, caera sobre CF; y por Consig.e el angulo EAD se ajustara exactam.te sobre el Ang.º BDF: Luego dichos angulos seran yg.s

Corolario 1.º

De lo dicho se infiere, que el triangulo Equilatero, es Equiangulo; ô que tiene sus tres angulos yguales.

Corolario 2.º

En el triangulo ysozeles la recta que divide por medio el angulo del vertize; divide tambien la base en dos partes yguales, y es perpendicular â ella.

Proposon. 6.ª theoa.

Si dos Angulos de un triangulo son yguales entre si, tambien seran yguales, los Lados opuestos â dhos Angulos.

Explicazion.

Sea el triangulo ABC que tenga el Angulo A ygual al Angulo B: digo, que los Lados opuestos AC, BC, son yguales.

Demostrazn.

Si se negase, que el Lado AC es ygual.

al Lado CB, sea maior, ô menor: Su
pongase pues que es maior, y Cortese
del (propn. 3a) la parte AD ygl. BC; con
lo qual, tirando la Recta DB, tendran los
triangulos ACB, ADB, el Lado AB, Co-
mun; AD ygual BC por Construzcion, y
y los angs. Comprehendidos yguales
luego (propn. 4a.) seran totalmte. ygus.
pero esto es ymposible; por ser el uno
parte del otro; luego tambien sera ym
posible, el qe AC, sea maior, ô menor
que CB; y pr. consigte. deveran ser yguales.

Corolario.

De aqui se sigue, que todo triangulo
Equiangulo; es Equilatero.

Propon. 8a. theora.

Si dos triangulos tienen los tres La
dos del uno yguales â los tres del otro,
cada uno â su Correspondiente; los
triangulos son totalmente yguales.

Explicazion

Sean los triangulos ACB, DEF que tengan el Lado AB ygual DF; el Lado BC ygual FE; y el Lado AC ygual DE. Digo que dhos triangs. son totalme. ygs.

Preparazion.

Considerese, que puesto el Lado DE sobre su ygual AC cae el triangulo DEF ala parte opuesta del triangulo ABC; y tirese la recta BF.

Demostrazion

El triango. BAF tiene los Lados, AB ygual AF por suposizion; Luego siendo Isozeles, sera (propn. 5a) los angulos sobre la base X y Z yguales.

Del mismo modo sese que es, el angulo V ygual N: luego Z+V=XN: esto es el angulo B=F; y por consiguiente los triangulos ABC, DFE seran (propos.n 4) totalmente yguales.

Si la recta BF Cayere fuera delos triangulos, se restarian los angulos, de los otros; Con lo qual quedarian, los angulos ABC, DFE yguales.

Si la recta BF coyncidiere con los lados BC, CF; en este Caso, solo resultaria un triangulo Ysozeles; y por las proposiz.s zitadas (4.a y 5.a) serian los triangulos prop.s totalmente yguales.

Propos.n 9. Probl.a

Dividir un Angulo rectilineo dado en dos partes yguales.

Explicaz.n y operaz.n

Sea el Angulo ABC, el que se ha de dividir; desde el punto B, cortese en los Lados, las partes BD y BE ygua.s, tirese la DE; y formando sobre ella, el triangulo Equilatero DEF, se tirara la recta BF; y esta dividira el angulo en dos partes yguales.

Demostrazⁿ

Los triangulos DBF, BEF, tienen los tres lados del vno yguales alos tres lados del otro: luego (propⁿ 8ª) son totalmente yguales; y por consiguiente los Angulos en B, son tambien yguales; esto es la recta BF divide el Angulo total B, en dos partes yguales.

Proposⁿ 10. Problª

Dividir vna recta dada, y terminada en dos partes yguales.

Ôperazion.

Sea la recta dada AB: descrivase sobre ella el triangulo Equilatero ABC; y dividiendo el Angulo C en dos partes yguales, con la recta CD: Esta dividira ala propuesta pr medio en D.

Demostrazⁿ

Los triangulos ACD, DCB, tienen, el Lado AC ygual al Lado BC por-

Construcción: CD Comun, y los Angulos Comprehendidos yguales; luego (Prop.^n 4.) son totalmente yguales; y por Consig.^te AD ygual DB: Esto es la Recta AB, dividida por medio en el punto D.

Propos.^n 11. Probl.^a

Dado un punto en una recta; Levantar en el sobre ella una perpendicular.

Operazion.

Sea la Recta EF; y el punto dado en ella sea D: Haziendo Centro en el, cortense las partes DA, DB yguales; Con qualq.^a yntervalo maior, que la mitad de AB: hagase desde los puntos A y B, la ynterz.^n C: de la qual tirando la Recta CD se tendra la perpendicular, que se pide.

Demostraz.^n

tiradas las Rectas AC y BC los triang.^s ACD, DCB, se ve, que por la (prop.^n 8.^a) son totalmente yguales; Luego los

Angulos en D, seran yguales; y por Consiguiente Rectos.

Propoziz.n 12. Prob.a

Dado vn punto fuera de vna Recta; baxar á ella vna Perpendicular.

Operazion

Sea la Recta dada EF; y el punto fuera de ella sea C; con qualquiera abertura de Compas, que pueda Cortar, ala Recta dada; haziendo Centro en C; describase el Arco AB y diuidiendo la AB por medio en D; si se tira la CD; Esta sera la perpendicular, que se pide: tirados los Radios, CA, CB: sese que los triangulos, CAD, CBD, tienen los tres lados del vno yguales, alos tres Lados del otro: Con que seran por la (propos.n 8.a) totalm.te yguales: Luego los Angulos en D, seran tambien yguales; y por Consiguiente Rectos.

Propos.n 13 theore.a

Quando una recta cae sobre otra; forma con ella dos Angulos rectos: ô juntos valen tanto como dos rectos.

Explicazion.

Sea la recta AB sobre la qual caiga la CD: digo que formara con ella dos Angulos rectos, ô que juntos, valgan tanto como dos rectos.

Demostraz.n

Si la recta CD cae perpendicularmente sobre la AB: es evidente, que los dos angulos, que forme seran rectos; pero si cayere obliquamente: Consideres descripto por el Centro C; el semicirculo ADB; el qual sera medida de los dos Angulos, que forma la recta CD, con la recta AB por que el arco AD es medida del angulo ACD; y el Arco DB medida del angulo DCB: Luego los dos angulos juntos valdran tanto como dos rectos; y tendran siempre por medida el semicirculo.

Propos.n 14. Theore.a

Si dos rectas concurren azia partes opuestas en el punto de otra recta, de suerte que formen con ella dos angulos y.s a dos rectos dichas dos rectas formaran una sola linea recta.

Explicazion

Sean las rectas AC, CB, que concurran en el punto C, en que tambien concurre la CD; y formen con ella los dos angulos O, Z, que juntos seran y.uales á dos rectos: digo q.e las dos lineas hazen una sola recta.

Demostraz.n

negandose, que las AC, y CB, son vna linea Recta, la AC prolongada, Caera ala parte de Arriva de CB, como en CZ; ô ala parte debaxo como en CO: Considerese pues q.e la ACZ es vna Linea Recta, en este Caso por la (Prop.n 13) seran los Ang.s O+Z yguales â dos Rectos; pero tambien lo son por suposn. los dos O+Z: Luego O+X = O+Z; pero el vno es parte del otro: Luego es ympossible, que la AC prolongada Cayga ala parte de arriva dela CB: del mismo modo se demuestra, que no puede Caer ala parte de Abaxo; luego es prezisso que Cayga sobre la OB; y por Consiguiente las AC, y CB, seran vna linea Recta.

Propos.n 15 theore.a

Si dos rectas se Cortan Harranlos Angulos verticalmente opuestos yguales.

Explicazion

Sean AB, y CD las rectas, que se cortan: Digo que los Angulos verticalmente opuestos como X y Z son yguales.

Demostraz.n

Por la (Prop.n 13) los Angulos O+X son yguales á dos rectos; y por la misma lo son tambien los Ang.s O+Z: luego O+X = O+Z; y deviendo de quitar el comun en O, quedara X, ygual Z: del mismo modo se demuestra, que es O = S.

Corolario

De aqui se infiere que los quatro Angulos S+X+O+Z son yguales a quatro rectos; y por consiguiente todos los ang.s q.e pueden formarse en vn punto; estando en vn Plano seran tambien yg.s á quatro Rectos.

Propos.n 16 theor.a

En qualquier triang.o prolongado vno de sus Lados; el Ang.o Externo es > q.e qualq.ra de los Internos Opuestos.

Explicazion

Sea el triangulo ABC: digo que á larg.ado vno de sus Lados como AC, sera el Angulo Externo > que qualq.a de los dos Internos Opuestos A y B: y lo 1.o digo q.e es maior q.e el ang.o B.

Preparazion.

Dividase el Lado AC por medio en F; tirese BF y alargada á dis crezion Cortese FH = BF; tirese la HC prolongada.

Demostraz.n

Los triangulos ABF, FHC tienen el Lado AF = FC; BF = FH vno y otro por

Con razon, y los Angulos Compre-
hendidos de dichos Lados por ser Ver
ticalmente Opuestos tambien yg. (Pro.n 15)
luego dichos triangulos son (propn 4) total
mente yguales; y por Consig.e el Angulo O ygl
a su Correspond.te A: pero O = S (p.n 15)
luego A = S, y siendo el Angulo S me-
nor que el Angulo Externo BCD por ser
parte del; sera tambien el Angulo A,
menor que el Angulo Externo BCD que
era lo primero.

Lo 2.° Digo que dicho Angulo ex
terno es tambien maior que el Ang.° B.

Preparazion.

Dividase el Lado BC por medio en
F, y tirando AF Corte se della prolonga
da FH = AF; y tirese HC.

Demostrazn.

Los triangulos ABF, FHC tienen
el Lado BF = FC; AF = FH mo-

y otro por Construzion; y los Angs. Com
prehendidos tambien ygs. (pron. 15) luego
(pn. 4) son totalmte. ygs. y por Consige. el an
gulo O = a su Correspte. B: pero el Angulo
O es parte del Externo BCD; luego tambn. el
Angulo B, sera parte de dicho Angulo ex-
terno; y por Consiguiente menor.

Proposn. 17 theorema.

En qualquier triangulo dos de sus Angulos son menores que dos Rectos. Se dara por Corolario de la (Propn. 32)

Proposn. 18 theora.

En qualquier triangulo: el angulo que se Opone al maior Lado es el mayor.

Explicazion

Sea el triangulo ABC; y el Lado maior BC: digo que el Angulo A opuesto â dho lado, es tambien el maior.

Preparazion

Del Lado maior BC Cortese la parte

BD = AB; y tírese AD.

Demostrazn.

El triangulo ABD es Isozeles por Construzion; luego (Propn. 5a) el Ang. $x = z$: pero $x > C$ (propn. 16) luego $z > C$: y por Consiguiente el Angulo total en A será mucho mayor, que no el Angulo C.

Del mismo modo se demuestra que el Angulo CAB es maior que el Angulo en B, con sola la diferencia de que en este Caso debe Contarse CB = CA.

Propon. 17 theorea.

En qualquier triangulo el Lado que se opone al maior angulo es el maior.

Explicazion

Sea el triangulo ABC; y el Ango. mayor sea A: digo que el Lado BC opuesto â dicho Angulo es el mayor.

Demostrazⁿ.

El Lado BC no puede ser ygual â ninguno delos otros dos Lados: porq. en este Caso, el Angulo A no seria el maior; tampoco puede ser menor; porque en este Caso porla (propⁿ. antezte) tendria el triangulo otro angº. ? que A: luego no pudiendo ser el Lado CB ygual ni menor, que ninguno delos otros dos Lados; es prezisso, que sea maior.

Propoⁿ. 20 theoreª.

En Qualquier triangulo dos de sus lados Juntos; son maiores qe. el terzº.

Es Evidente porque la Linea Recta es la mas breve distanª. entre dos puntos.

Propoⁿ. 21 theoª.

Si delos Extremos del Lado deun triangulo se tiran dos Rectas, que concurran dentro deste, seran meno

res, que las otras dos; pero forma-
ran Mayor Angulo,

Explicazion

Sea el triangulo ABC; y delos Extre
mos del Lado AC se tiren las dos
rectas AD, CD; que Concurran dentro
del triangulo: digo que Juntas se
ran menores, que los Lados AB, y BC
pero que formaran Mayor Angulo,

Demostrazⁿ.

Alargada la AD hasta F: Enel
triangulo ABF los dos Lados AB+BF
son maiores que AF; y añadiendo, âuna
y otra parte FC sera AB+BC > AF+FC
tambien enel triangulo CFD, se tiene
CF+FD maior que CD; y añadᵈᵒ. â am
bas partes DA, sera CF+FA > CD+DA.
Luego CB+BA, sera mucho maior, que
AD+DC: El Angulo X qᵉ. forman las
rectas AD y DC es > por Externo que

el Angulo Z, y por la misma razon Z es maior que B: Luego el Angulo X mucho mayor que el Angulo B.

Propos.^n 22 Probl.^a

formar vn triangulo, Cuios tres Lados sean yguales à tres Rectas dadas con tal que cada dos destas, sean mayores, que la tercera.

Explicaz.^n y Oper.^n

Sean las rectas dadas AB, CD, FG, tirese vna recta MN ygual à qualq.^a delas dadas como FG; y haziendo Centro en el Extremo M; con el Intervalo dela CD, descrivase vn arco; y con el Intervalo dela otra recta AB descrivase otro Arco que Cortara al 1.^o en el punto O y tirando las rectas MO, NO se tendra el triangulo que se pide C consta dela (definizion 15)

Propos.^n 23 Prob.^a

En vn punto de vna Recta formar vn Angulo ygual â otro Angulo dado.

Explicaz.n d Oper.n

Queriendo en el punto G dela Recta GF, formar vn Angulo ygual al Ang.o dado BAC se tomara qualq.ra Abertura de Compas; y haziendo Centro en A, se descrivira vn arco BC, Con el mismo Intervalo haziendo Centro en G se descrivira el Arco PE, y tomando la distan.a de CB se Cortara con ella desde F, el arco FP, y tirando ala Interzecion la Recta PF, se tendra el Angulo FGP ygual al dado.

Demostrazion.

tiradas las Rectas BC, PE los triang.s ABC, PGF son (Prop.n 8) totalm.te ygu.s, Luego el Angulo G sera ygual â su Correspondiente A: que es lo que se avia de demostrar.

Propo.n 21 theor.a

Si dos triangulos tienen los dos Lados del uno yguales alos dos del otro; si los Angulos Comprehendidos fueren desyguales; el q.e tuviere mayor angulo tendra maior base.

Explicazion.

Sean los triangulos ABC, ABD: que tengan el Lado AB Comun; y BC ygual BD: digo, que el triangulo ABC que tiene el angulo en B maior; tendra mayor base AC.

Demostrazion

En el triangulo CPB se tiene (P.n 20) CP + PB maior que CB; y siendo CB ygual DB; sera CP mas PB maior que DB; y quitando sedra ygora parte PB quedara CP maior que DP; y añadien do PA: sera CA maior DP mas PA; pero DP mas PA, maior que DA, por

la (Propos.n 20) luego CA sera ma
yor que DA.

Si el Punto D, cayese dentro del
triangulo ABC; sera BC mas CA >
BD+DA quitando los Lados yg.s BC y BD
quedara CA>DA. Si el punto D Cayese
en la misma Vase sería Entonzes AD
parte de AC; y por Consiguiente menor.

Propos.n 25 theore.a

Si dos triangulos tienen dos Lados
del vno yguales à los dos lados del otro;
Cada vno à su Correspond.e y las Vases
fuesen desygi. el que tuviere mayor-
vase, tendra mayor angulo.

Explicazion.

Sean los triangulos ABH, IQP que
tengan AB = IQ; y BH ygual QP:
pero la Vase IP sea mayor que
AH: Digo que el Angulo Q sera
mayor que B.

Demostrazⁿ

El Angulo a no puede ser ygual al Angulo B: por que si lo fuese los triangulos serian (Proⁿ. 4ª.) totalmente ygs. y por consige. seria tambien AH ygl. LP; tampoco el Angulo a puede ser menor qe. el angulo en B: por que en este Caso seria (Propⁿ. 24) AH maior qe. LP: luego, no pudiendo ser el Angulo a ygl. ni menor que el Angulo B sera precisamente maior.

Proposⁿ. 26 theoª.

Si dos triangulos tienen dos angs. del uno yguales à dos del otro, y un Lado ygual a un Lado: Cada Cosa à su Correspondiente seran los triangulos totalmente yguales.

Explicazion

Sean los triangulos ABG, LHa que tengan el Angulo A ygual el Angº

B = H: y el Lado AB ygual LH: digo
que seran totalmente yguales.

Demostraz.ⁿ

Si el lado AG fuese ygual al Lado LQ
es evidente que los triangulos seran
(Prop.ⁿ 1) totalm.ᵗᵉ yg.ˢ: pero si se dixese, que
es maior, o menor: supuesto sea y
Corte se AR ygual LQ, y tirando la RB
los triangulos RAB, QLH que tienen
dos Lados del uno yguales a los dos La
dos del otro; y los ang.ˢ Compreh.ˢ tam
bien yguales, seran (Prop.ⁿ 1) totalm.ᵗᵉ yg.ˢ
y por Consig.ᵗᵉ el ang.ᵒ RBA ygual QHL
pero QHL es ygual GBA: luego GBA,
ygual RBA: esto es el todo ygual a la
parte, lo que es Imposible; y por-
Consiguiente AG no puede ser may.ʳ nime
nor que LQ: Luego sera ygual; y
por Consiguiente los triangulos seran
totalmente yguales.

Si fueren los Lados GB, AH los ygs. siendo los angulos los mismos, que antes; tambien se demostrara, que los triangs. deven ser totalmte. yguales.

Si el Lado AB es ygual à LH los triangulos seran (Propn. 4) totalmte. yguales pero si se dixese que es maior, ò menor Considerese que es maior; y Cortese BR = HL; por lo qual tirando la GR los triangulos GBR, AHL seran totalmente yguales y el Angulo x = L pero el Angulo L ygual al angulo A: Luego el Angulo x = A; lo que es ymposible (Propn. 16) pues como Exterior deve ser mayor.

Lemma.

Entre dos Paralelas la Recta qe. es perpendicular ala Una, es tambn. perpendicular ala Otra; y siuna Recta es perpendicular à Otras dos; estas seran Paralelas.

Explicazion

Sean las rectas paralelas PQ, RS y sea la BA perpendicular á RS: digo que tambien lo sera á la PQ.

Preparazion.

Cortese AM = AN y en los Puntos M y N; Levantense las perpendiculs. MO, NL; y tirense las OA y LA.

Demostrazn.

Los triangulos OMA, LNA son (P.n 4) totalmente yguales; por que tienen MA = AN pr. Constrn. MO = MN (axioma 12) y los angs. comprehends. de dhos Lados tambn. ygs. luego el ang.o X = Z, que quitados de los rectos en A quedara el ang.o T = V tambien por la ygualdad de dhos triangs. es OA = AL; y los triangulos OAB, BAL seran (p.n 4) totalmente yguales: luego los angulos en B seran ygs. y pr.

Consiguiente Rectos. que es lo q.e S.a

Lo 2.o digo que si AB es perpendicular a las PQ, RS; estas seran paralelas.

Con el BO ygual BL y baxense OM, y LN perpendiculares à RS, y tirando las OM, LN; los triang.s OBA ABL, seran (Prop.n 4) totalmente ygu.s y p.s Consiguiente el Lado OA ygual AL y el angulo T ygual V, que quitados delos Rectos en A, quedara el ang.o X = Z; Con lo qual los triangulos OMA, ALN que tienen los angulos en M y N ygu.s por Construzcion; el Angulo X = Z, y el Lado OA ygual AL seran (P.n 26) totalmente yguales: luego MO = NL; que siendo las Perpendiculares, seran por Consiguiente RS, y PQ paralelas: pues lo mismo se demuestra de qualquiera otras Rectas.

Propocn. 27 theorea.

Si una Recta Corta a otras dos Haziendo con ellas los angulos alternos yguales: Estas dos Rectas seran paralelas.

Explicazion

Corte la Recta AB a las MN y PQ; formando con ellas los angulos X y Z, que se llaman (Alternos) yguales: digo que dichas Rectas MN y PQ seran paralelas.

Preparazn.

Dividase la HL por medio en O. y sacese OF perpendicular a PQ alargandola, Hasta Cortar a la MN, en el Punto D.

Demostrazn.

Los triangulos OLF, ODH tienen el lado LO = OH; los Angulos Verticalmente opuestos en O yg. (P.n 15) y tambien el Angulo X ygual Z; luego (Propon. 26) son totalmente ygs; y por Consiguiente el ang. HDO = OFL; pero OFL es Recto por suposizion: luego HDO, es tambien recto; y por Consiguiente sera DF perpendicular a las dos Rectas MN, PQ: luego (2.a parte) del Lema antecedente, estas seran Paralelas.

Propocn. 28 theore.

Si una Recta Corta á otras dos, haziendo con ellas el angulo Externo ygual a su Interno opuesto: ó bien los dos Internos de una misma parte yguales á dos Rectos; dichas rectas, seran paralelas.

Explicazion

Si a las rectas MN, PQ; las Corta la AB, formando el angulo Externo X ygual Z su Interno opuesto; obien los dos Internos de una misma parte

V+Z yguales â dos Rectos: digo-
que dichas Rectas son Paralelas.

Demostrazion

Lo 1.º siendo el Angulo Externo X
ygual O (Prop.n 15) sera O=Z; pero
estos son alternos (luego prop.n 27)
MN y PQ son paralelas.

Lo 2.º siendo los dos Angulos
V+Z yguales â dos Rectos, y siendolo
tambien los otros dos V+O; quitando
de ambas partes el Angulo V, que-
dara el Angulo O ygual Z; y siendo
estos Alternos; seran dichas Rec-
tas paralelas.

Propos.n 29 theore.a

Si una Recta Corta â otras dos,
que sean paralelas; Hara con
ella los angulos alternos yguales:
el Externo ygual â su Interno y opues
to; y los dos Internos de una misma

parte yguales â dos Rectos.

Explicazion

Corte la Recta PQ de qualquier modo alas Paralelas MN, OS: digo que hara con ellas el angulo Z ygual â su alterno V; el Externo X ygual â su ynterno y opuesto V; y los dos ynternos dela misma pte. T+V ygs. â dos Rectos.

Preparazion

Dividase la RH por medio en L, y dste punto tirese la LD perpendicular ala OS, alargandola por arriva hasta el punto K.

Demostrazion

Por ser las Rectas MN, OS paralelas; y KD perpendicular ala OS lo sera tambn. pr. el (Lema) ala MN; y los triangulos RDL, LHK tendran el angulo en K = al angulo en D por ser rectos; los angulos verticalmente

Opuestos en L, tambien yguales (Propn. 15) y el Lado RL = LH por Construzion: luego (Proposn. 26) seran totalmte. yguales; y el angulo Z, ygual á su alterno V; y siendo el angulo externo X ygual Z; será tambien X ygual a su interno y ô puesto V: tambien siendo Z = V; será Z + T = T + V: pero Z + T son yguales á dos rectos; luego los dos angulos internos dela misma parte T + V serán tambien yguales á dos rectos.

✱ Proposn. 30 theorema ✱

Las rectas Paralelas á vna misma son paralelas entre si.

✱ Explicazion ✱

Sean las rectas AB, QS paralelas ala PR: digo que son paralelas entre si.

Demostraz.n

tirada la LH que corte de qual quier modo a las tres Rectas, sera por la (Propos.n antezed.te) el angulo X ygual Z; y Z ygl. V: Luego X = V; y siendo (propos.n 28) las AB, CD; son paralelas.

Propos.n 31 Proble.a

tirar una Paralela a una Recta da da; por un punto dado fuera de ella.

Explicaz.n y Oper.n

Sea la Recta dada AB; y el punto fue ra de ella sea D: por el qual se pi de tirar la paralela.

tirese qualquier Recta DP: y formese el Ang.o Z = X; y la DS sera la para lela, que se pide: Consta de la (p.n 27) por ser dichos angulos alternos.

Propos.n 32 theore.a

Los tres angulos de qualq.r triang.o

son yguales â dos rectos; y alanga-
do uno de sus lados; el angulo ex-
terno; es ygual â los dos ynter-
nos opuestos.

Explicazion.

Sea el triangulo EHΘ: digo que
los tres angulos son yguales â dos Rec-
tos; y que alangando uno de sus lados
como EΘ, es el ang.° externo T ygual â
los dos Internos opuestos M+V.

Preparazion

Por el Verteze H tirese AB para-
lela â EΘ.

Demostraz.n

Por ser AB y EΘ paralelas; se-
ra el angulo O = M; y X = V: luego
X mas N mas O ygual V mas N
mas M: pero X mas N mas O, son
yguales â dos rectos (prop.n 13)
luego los tres ang.s del triang.° V+N+O-

serán tambien yguales á dos Rectos que era lo 1.º Lo 2.º será el angulo externo T ygual V mas N: porque siendo el Angulo X ygual V; será X+N ygual V mas N; pero X mas N yg.¹ T luego V+N=T.

Corolario 1.º

En qualquier triangulo dos de sus angulos, serán siempre menores que dos Rectos (es la Proposizion 17)

Corolario 2.º

Los tres angulos juntos de qualq.ʳ triangulo, serán siempre yguales á los tres de otro; y si la suma de dos angulos deun triangulo es ygual ala suma de dos de otro; el terzero será ygual al terzero.

Corolario 3.º

Si un triangulo tiene un angulo Recto ó obtuso, los otros dos serán agudos.

Corolario 4.°

En el triangulo Isozeles Rectangulo cada angulo sobre la base es semi recto; ó de quarenta y cinco grados.

Corolario 5.°

En el triangulo Equilatero; cada uno de sus angulos es de 60 grados.

Corolario 6.°

En qualquier triangulo; conozidos dos de sus angulos, se tiene el terzero.

Corolario 7.°

En el triangulo Isozeles; conozido un Angulo; se tendran todos los demas.

Corolario 8.°

Si en qualquier rectilineo se duplica el Num.° de sus Lados; y de este duplo se restan quatro, el residuo será, el Numero de los Angulos rectos que valdran todos los angulos de la figura: por que siendo por Exemplo un pentago.no

ó figura de Cinco Lados 1.2.3.4.5.
si desde Punto dentro de el; como C; se
tiran rectas á todos los Angulos, re-
sultaran tantos triangulos; como lados tie
ne la figura; y los Angulos rectos de estos,
triangulos, que resultaran, los sumaran
los ang.s de dhos triangulos, seran en
este Caso diez de los quales quitando
los quatro que se forman en C; quedaran seis
p.r el Valor de todos los del Pentagono.

Corolario 7.

La suma de todos los Angulos de-
qualquier figura rectilinea, sera ygual
ala suma de todos los Angulos de otra
que tenga ygual numero de Lados;
aunque estos sean todos desyguales.

Proposic.n 33 theore.a

Las rectas que unen á dos para-
lelas yguales de una misma parte:
son tambien yguales, y Paralelas.

Explicazion.

Sean las Rectas AB, CD yguales y Pa
ralelas: digo que las AC, y BD que
las unen son tambn. ygs. y paralelas.

Demostrazion

tirada la Recta AD: los triangulos
ABD, ADC seran totalmente yguales:
por tener el Lado AB ygual CD: AD
Comun, y los angulos X, Z, tambien
yguales por ser Alternos: Luego el
lado AC, sera ygual BD: y el angu
lo O ygual al Angulo O: y siendo Al
ternos, las Rectas BD, y AC seran
paralelas.

Propocn. 34 theorema.

En todo Paralelogramo los Lados
y Angulos opuestos son Yguales;
y la diagonal lo divide en dos par
tes Yguales.

Explicazion.

Sea el Paralelogramo AD: digo q.e sus Lados y Angulos opuestos son yguales; y que la Diagonal AD lo divide en dos partes Yguales.

Demostrazion

Por ser AB y CD paralelas sera el Angulo X ygual Z: tambien por ser Paralelas BD y AC: sera el Angulo P ygual O: y los triangulos ABD, y ADC seran (Propos.n 26) totalmente yguales: y por Consiguiente todos los Angulos y Lados opuestos yguales.

Propos.n 35 theore.a

Los Paralelogramos que tienen una misma Base; y estan en unas mismas Paralelas son Yguales.

Explicazion.

Sean los Paralelogramos AO, AP, que tengan una misma Base AB, y esten entre las Paralelas HF, AB, dicho que son iguales.

Demostraz.ⁿ

Siendo AQ un Paralelogramo se-ra HQ igual AB: por la misma ra-zon es MP igual AB: Luego HQ ig.l MP; y añadiendo QM; sera HM igual QP: tambien por razon de los pa-ralelogramos se tiene AH igual BQ y AM igual BP: Luego (propos.ⁿ 8) los triangulos AHM, BQP, seran totalmente iguales; quitando de ambos el triangulo OQM, quedaran los dos trapezios AOQH, BOMP, iguales y añadiendo el triangulo ABO, se tendra el Paralelogramo AQ igual al Paralelogramo AP.

Propos.ⁿ 36 theore.ᵃ

Los Paralelogramos, que tienen iguales vases, y estan en unas mis-mas paralelas, son iguales.

Explicazion

Sean los Paralelogramos AQ, RP, que tengan yguales Bases AB, Rs, y es-ten entre unas mismas paralelas HP, AS: digo que son yguales.

Demostrazion

tiradas las rectas AM, BP; siendo MP ygual Rs ygual AB: sera AP un pa-ralelogramo; y por consiguiente ygual al Paralelogramo AQ y al Paralelogra-mo MS (Pro.n 35) luego estos dos ulti-mos Paralelogramos son yg.s que es d.a

Propos.n 37 theore.a

Los triangulos que tienen una mis-ma Base, y estan entre unas mis-mas paralelas, son yguales.

Explicazion.

Sean los triangulos AQB, AMB; que tengan una misma Base AB; y es-ten entre las paralelas HP, AB: Digo que son yguales.

Demostraz.^n

tirada por el punto A; AH para-
lela á BQ; y por el punto B; BP para-
lela á AM (prop.^n 31) serà el trian-
gulo AQB mitad del Paralelogramo
AM; y el triangulo AMB mitad del Pa-
ralelogramo AP: pero los Paralelog.^s
AM, AP son yguales (prop.^n 35) luego
tambien lo seràn sus mitades, que
son los triangulos AQB, AMB.

Propos.^n 38 theore.^a

Los triangulos que tienen yguales
sus bases; y estan entre unas mismas
paralelas son yguales.

Explicazion

Sean los triangulos ABC, CDH;
que tengan las bases AC, y CD yg.^s
y esten entre las Paralelas AD, BH:
digo que son yguales.

Demostraz.ⁿ

tirada por el punto C; CP paralela á AB, y CQ paralela á DH; se tienen los dos paralelogramos AP y CH, que por tener yguales vases, son yguales (propⁿ. 36) y siendo duplos delos triangulos ABC, CDH (proposizion 34) estos seran tambien yguales. que es dᵗᵒ.ᵃ

Propⁿ. 37 y 1ᵒ. theore.ᵃ

Los triangulos yguales, que tienen vna misma, ó ygˡ. vase; y estan situados azia vna misma parte; estaran entre vnas mismas paralelas.

Explicazion

Sean los triangulos AQB, AMB, yguales, y tengan vna misma, ó ygual vase AB, estando situados en vna misma parte: digo que estaran entre vnas mismas paralelas AB; QM

Demostn.

Si se negase, que QM es Paralela á AB; lo sera otra qualquiera, como la QP; y tirando la recta AP y la BP, (si cayese dela parte deArriva) seran los dos triangulos AQB, ABP, yguales; pero AQB ygual AMB: luego ABP ygual ABM: pero esto es ympossible, por ser el uno parte del otro: luego la recta QP no puede ser paralela ala base AB: demostrandose lo mismo de qualquiera otra, solo lo sera QM.

Proposn. 41 theorema.

Si un Paralelogramo y un triangulo tienen una misma base, y estan entre unas mismas paralelas; el Paralelogramo sera duplo del triango.

Explicazion

Sea el Paralelogramo AQ; y el triango

ARB: digo que el Primero es du-
plo del segundo.

Demostraz.n

tirada la diagonal BC, se tiene el triangulo ABC mitad del Paralelog.mo AQ; pero el triangulo ABC es ygual al triangulo ARC (por la prop.n 37) luego el triangulo ARC es mitad del Paralelogramo AQ.

Propos.n 43 theore.a

En todo Paralelogramo, los Complementos son yguales.

Explicazion

Sea el Paralelogramo AC: digo que los Complem.s AO, y OC son yguales.

Demostraz.n

El triangulo DAB es ygual al triang.o DCB (p.n 34) tambien es el triang.o M, ygual N, y el triang.o Z ygual X: luego Quitando M+Z de una parte; y N+X de-

Otra quedara el Complemento AO ygl. al Complemento OC.

✻ Propocn. 46 Probleª. ✻

Sobre vna Recta dada formar vn Quadrado.

✻ Explicazion ✻

Sea la Recta dada AB: ~~en~~ En los puntos A y B Levantense las perpendiculares AD y BP yguales ala Recta, AB; tirese la DP y se tendra el Quadrado.

✻ Demostrazion ✻

Siendo AB perpendicular alas Rectas AD y BP, ~~estas~~ estas seran Paralelas, y siendo Yguales entre si lo seran tambien las AB y DP: pero AB por Construzion es ygual a AD ygual BP, luego todas quatro Rectas son yguales entre si; y Haziendo los Angulos en A y en B Rectos, lo seran tambn. sus opues luego AP es un Quadrado.

Corolario

Si dos rectas son yguales, sus Quadrados lo seran tambien; y al Contrario, si los Quadrados son yguales, lo seran tambien sus Lados.

Propos.n 47 theore.a

En todo triangulo rectangulo el Quadrado hecho sobre la Hypotenusa; es ygual ala suma delos Quadrados hechos sobre los otros dos Lados.

Explicazion

Sea el triangulo ABC rectangulo en B: digo que el Quadrado AR hecho sobre la Hypotenusa, es ygual alos Quadrados BH y DB hechos sobre los otros dos Lados.

Preparaz.n

Por el punto B, tirese BP paralela

al Lado CR; y tirense tambien las Rectas AD y BR.

Demostrazion.

Por formar las Rectas AB y BM dos Angulos rectos con el Lado BC, seran (Prop.^n 14) una Linea Recta y esta sera paralela á CD: por lo qual el triangulo ACD sera (P.^r 41) mitad del Quadrado CM; por la misma Construzion es el triangulo BCR mitad del Paralelogramo Rs; pero los dos triangulos ACD, BCR son totalmente yguales; por que tienen AC ygual CR; CD ygual CB; y los angulos Comprehendidos $X+O=Z+O$ por que X y Z son angulos rectos; luego el Quadrado BD, que es duplo del triangulo ACD sera ygual al Rectangulo Rs, que es duplo del otro triangulo ygual BCR: del mismo modo se demuestra que el Quadrado BH es ygual al Rectangulo AP; Luego los dos Quadrados HB y BD seran yguales alos dos Rectangulos AP y SR: ô bien al Quadrado de la Hypotenusa AR.

Corolario 1.º

De aqui se infiere que en qualquier triangulo Isozeles Rectangulo, el Quadrado dela Hypotenusa, es duplo del Quadrado de qualquiera otro Lado.

Corolario 2.º

~~En~~ Qualquier triangulo Obliquangulo PSQ; si se baxa una perpendicular SR ala Base PQ sera el Quadrado del Lado PS junto con el del Segmento alterno RQ igual al Quadrado del otro Lado SQ mas el Quadrado de su Segmento alterno PR: por que siendo $\overline{PS}^2=\overline{PR}^2+\overline{RS}^2$ y $\overline{SQ}^2=\overline{RQ}^2+\overline{RS}^2$: añadiendo yguales, a yguales $\overline{PS}^2+\overline{RQ}^2+\overline{RS}^2=\overline{SQ}^2+\overline{PR}^2+\overline{RS}^2$ ô bien, $\overline{PS}^2+\overline{RQ}^2=\overline{SQ}^2+\overline{PR}^2$.

tambien si dela Ultima ygualazion, se quitan $\overline{SQ}^2+\overline{RQ}^2$ quedara $\overline{PS}^2-\overline{SQ}^2=\overline{PR}^2-\overline{RQ}^2$: esto es-la diferencia Entre los Quadrados delos Lados yguales ala diferencia entre los Quadrados delos Segmentos.

Propos.n 18 theore.a

En Qualquier triangulo si el Quadrado de un Lado, es ygual â los Quadrados delos otros dos: el ang.° opuesto â dicho Lado sera Recto.

Explicazion.

Sea en el triangulo ABC; AC quadrado ygual AB quadrado mas BC quadrado: digo que el Angulo B es-rectos.

Preparazion.

En el Punto B: Levantese, sobre BC la perpendicular BD ygual AB, y tirese CD.

Demostrazion.

Siendo por lo supuesto AC quadrado ygual AB quadrado mas BC quadrado, y por la (47) CB quadrado mas BD quadrado ygual CD quadrado $+\overline{BA}^2$, por ser BD ygual BA, sera CD quadrado ygual CA quadrado; y por consiguiente CA ygual CD: Con lo qual los triangulos ABC, CBD: seran (pr. 8.a) totalmente ygs. y los angulos en B ygs. y rectos: Luego el triangulo ABC es rectangulo.

Fin del Libro 1.º

+

Libro 2º.

En este Libro se Consideran los Rectangulos, y Quadrados que se forman sobre las Lineas Rectas; ya Considerandolas, como Enteras; ya como divididas en varias partes: su Intelix.ª es de Mucha Utilidad, teniendo grande Uso sus theoremas en la Resoluzion de sus Problemas. Las demostraz.s para maior Intelixenzia, despues de darse por Lineas, y por Letras se Explicaran por Numeros.

Definiziones.

1.ª Potenzia de dos Lineas es el Rectangulo, que se forma, ó se puede formar de ellas; como si se Considera que la Recta AC se Mueve sobre AB, siendo siempre perpendicular á ella, en llegando el punto C al punto

D; y el punto A al punto B se arra, formado el Rectangulo AD por las dos lineas AB y AC; y este se llama potencia de ellas. La una de ellas Expresa la Longitud como AB, y otra la Latitud como AC.

Si la Longitud AB se Expresa, por el Numero 6, y AC por el numero 3 el producto 18 Expresa el Rectangulo de AB por AC, y sera la Potenzia de los Numeros 6 y 3.

Definizion 2.ª

Si las dos Rectas AB y AC fuesen ygs. la potencia dellas, sera a un Quad.º y si cada una se supone = 6; sera su Quadrado = 36.

Definizion 3.ª

Sien un Rectangulo qualquiera, AD; se tira la Diagonal CB; y por un punto de ella como O paralelas a los Lados AB, y BD: los Complemen.s

AO, y OD juntos con el Rectangulo BO formaran vna figura que se llama Hegnomon, o Esquadra.

Propos.n 5.a theore.a

Si de dos Rectas; la vna se divide en partes; y la otra no: el Rectang.o hecho delas dos es ygual, â los Rectangulos dela no dividida en cada vna delas partes de la dividida.

Explicazion.

Sean las dos Rectas AB y AC: y esta la AB dividida en qualesquiera partes, como AP, y PB: En el punto A levantese AC perpendicular ala AB; perfizionese el Rectangulo AD; y p.r el punto P, tirese PH paralela â AC.

Demostrazion.

AH es vn Rectangulo hecho dela parte AP y dela Recta AC; y BH es otro Rectangulo hecho dela parte PB y de la PH yguał AC: pero estos dos Rectangulos, sese que componen al total AD. Luego. &ra.

Por Letras.

Sea $AP = a$. $PB = b$. y $AC = c$ sera AB ygual $A+b$. Luego $a+b \times c = ac+bc$.

Por Numeros

Sea $AP = 2$. $PB = 3$. sera $AB = 5$ sea tambien $AC = 4$. sera $AC \times ab = 8+12 = 20$.

Propos.on 2.a theore.a

Si vna Recta se divide como quiera, en dos partes: su Quadrado sera ygual a los Rectangulos hechos por ella, en cada vna de sus partes.

Explicazion.

Sea la Recta AB dividida como quiera en P: formese sobre ella el Quadrado AD, y por el punto P tirese PH paralela-à AC.

Demostrazⁿ.

El Rectangulo AH esta hecho dela toda AB y la parte AP: y el Rectangulo PD, esta tambien formado dela parte PB y la parte PH ygual ala toda AB: pero los dos Rectangulos Componen el Quadrado AD, luego. &a.

Por Letras.

Sea AC = AB = c. AP = a. y PB = b: sera AC x AB ygual AB quadrado ygual CA + CB.

Por Numeros.

Sea AC = AB = 4. AP = 3. y PB = 1. sera AP quadrado ygual 16 = 12 + 4.

Propⁿ. 3ª. theoreª.

Si una Recta se divide como quiera en dos partes: el Rectangulo hecho de estas partes mas el Quadrado

serra de ellas; es ygual al Rectangulo
hecho de esta parte en la toda.

Explicazion.

Sea la Recta AB dividida como quie
ra en C: digo que el Rectang.° hecho
de AC en CB, mas el Quadr.° de CB es
ygual al Rectang.° de AB en CB.

Preparazion.

Sobre CB formese el Quadrado CD,
y prolongando el Lado DH, tirese p.r A,
vna paralela â CH, hasta Contanta.

Demostrazion

Siendo CH ygual CB: sera AH el Rec
tangulo hecho delas partes AC y CB;
y siendo tambien BD ygual CB sera AD
el Rectangulo hecho dela toda en la
parte CB: pero este Rectangulo es
ygual al Rectangulo AH mas al qua
drado CD. Luego. &c.a

Por Letras.

Sea AC $=$ . . . . a

CB $=$ . . . . b

Sera AB × BD $= a+b \times b = ab+bb$

Por Numeros.

Sea AC $=$ 3

CB $=$ 2

Sera AB × CB $=$ . . . . $5 \times 2 = 6+4$

Propⁿ. 4.ª theorem.ª

Si una recta se divide en dos partes: El Quadrado hecho dela toda; es ygual alos Quadrados delas partes mas ados rectangᵒˢ. delas mismas partes.

Explicazion

Sea la recta AB dividida como quiera en S; formese sobre AB el Quadrado AC: tirese la diagonal DB; y por S, la SN paralela á BC: por el punto P en que esta Corte ala diagonal DB tirese tambⁿ. la MR paralela á AB.

Demostrazⁿ.

El triangulo DAB es ysozeles rectang.º luego los Angulos X y O son yg.s y semi rectos; y siendo Z = O: por ser externo, el triangulo DMP sera tambien ysozeles rectangulo; lo mismo sera, del triangulo DNP: Luego MN es un quadrado; y siendo MP = AS (P.n 34) sera dho Quadrado dela parte AS. Del mismo modo se demuestra q.e SR es el quadrado dela parte SB, y siendo SP ygual SB; sera el rectang.º AP, hecho delas partes AS, y SB; y lo mismo sera el otro Complemento su ygual PC: pero los Complementos Juntos con los Quadrados delas partes, Componen el Quadrado total. Luego &c.a

⁂ Por Letras. ⁂

Sea $AS =$ .... a

Sea $SB =$ .... b

Sera $\overline{AB}^2 =$ .... $\overline{a+b}^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

✳ Por Numeros. ✳

Sea AS = ... 4

Sea SB = ... 2

Sea AB = ... 6

y $\overline{AB}^2$ = ... 36 = 16 + 16 + 4.

✳ Propⁿ 5ª theorª ✳

Si una recta se divide en dos partes yguales, y en dos desyguales; el rectangulo hecho delas partes desyguales Junto con el Quadrado dela parte yntermedia: es ygual al Quadrado dela Mitad dela propuesta.

✳ Explicazion ✳

Sea la Recta AB, la que este dividida en dos partes Yguales en C: y en dos desyguales en D: formese sobre CB el Quadrado CP, tirese la diagˡ. BQ, la DR paralela ala CQ, pᵗ. L, la LS paralª a BA; ypᵗ. A, la AS parª á CQ.

✳ Demostrazⁿ ✳

Los Complementos CL, y LP son yguales; y añadido á ambos el Rectangulo ó Quadrado DM; sera el Rectangulo CM = al Rectangulo DP; pero los Rectangulos AN, y CM son yguales (Pr. 36) luego AN ygual DP; y añadiendo á ambos el Rectangulo CR; sera el Rectangulo AR, mas el Rectangulo NR ygual al Quadrado CP: pero AL esta hecho delas partes desyguales AD y DB ygual DL: y el Rectangulo NR (por ser CP su Quadrado) es el quadrado dela parte yntermedia CD ygual NI Como se acava de demostrar en la (proposicion 1.ª) Luego &c.ª

Por Letras.

Sea AC = CB = ... a

CD = ... b

sera DB = ... $a - b$

y el Rectangulo AL = . . . $a^2 - b^2$

y añadiendo el Quadrado dela parte

intermedia b^2, se tendra el Quadrado dela altitud dela Propuesta ygual a^2.

Por Numeros.

Sea $AC = CB = \ldots\ldots 5$

sea $CD = \ldots\ldots 2$

Sea $DB = \ldots\ldots 3$

y $\overline{CB}^2 = \ldots\ldots 25 = 24 + 1$,

Propos.^n 6.^a theore.^a

Si una Recta se divide en dos partes yguales, y directamente se le añade otra; el Rectangulo hecho detoda la compuesta enla añadida, junto con el Quadrado dela altitud dela propuesta; es ygual al Quadrado hecho dela altitud dela dada, y la añadida.

Explicazion.

Sea la Recta AB que este dividida por medio en C, y directamente añadida la BD: Sobre CD formese el Quadrado

CP: por el punto B, tirese BS paralela a DP, tirando la diagonal, y por el punto en que corta la Conce, tirese QG, paralela à AB.

Demostrazion

Por ser PC su Quadrado el Rectang.^{o} MS lo sera tambien; y siendo MR ygual CB: el Quadrado MS lo sera de la mitad dela propuesta. tambien BQ sera Quadrado; y por Consiguiente DQ = DB: Con lo qual el Rectangulo AQ estara hecho de toda la Comp.^{ta} AD, y dela añadida BD ygual DQ; Los Complementos PR y RC son ygual.^{s} pero los Rectang.^{os} AM y CR lo son tambien; luego el Rectangulo AM ygual RP y añadiendo â ambos el Hegnomon HKL, se tendra el Rectangulo AQ, y mas el Quadrado MS ygual al Quadrado CP... que es lo que S.^{a}

Por Letras.

Sea $AC = CB$ = ... a

sea BD = ... b

será $AD \times BD$ = ... $2a+b \times b = 2ab+b^2$

y añadiendo el Quad.° de $CB = a^2$

se tendrá .... $a^2+2ab+b^2$. pero $\overline{CD}^2 =$

$= a^2+2ab+b^2$. Luego. &c.ª

Por Numeros.

Sea $AC = CB$ = ... 3

sea BD = ... 2

será $AD \times BD$ = ... 16

y añad.° $\overline{CB}^2$ = ... 9

se tendrá 25

pero $\overline{CD}^2$ = ... 25

Luego &c.ª

Propos.n 7.ª theo.ª

Si una recta se divide, como quiera en dos partes; el Quadrado dela toda, junto con el Quadrado deuna de sus partes; es igual á dos Rectang.s

hecho dela toda en esta parte; mas
el Quadrado dela otra.

Explicazion

Sea la recta AB dividida como quie
ra en Z; sobre ella formese el Quadr.º
AP; por el punto Z tirese MN para
lela à BP, y por el punto N q.e corta la
diagonal la LH paralela à AB; perfi
zionese el Quadrado AM.

Demostraz.n

Siendo AR ygual RM ygual AZ; y sien
do tambien AL ygual ZN ygual ZB sera
el Rectangulo RN hecho de LR, ygual ala
dada AB, y RM ygual ala parte AZ;
tambien el Rectangulo LP esta hecho
dela parte dela LH = AB; y dela LS ygual
RM ygual ala parte AZ: pero estos
dos Rectangulos Juntos con el quadra
do ZH dela parte ZB componen el Qua
drado dela toda, mas el Quad.º dela

parte AZ. luego &c.a

Por Letras.

Sea la parte AZ $=$ . . . . a

y la parte ZB $=$ . . . . b

sera la toda $a+b$, y su Quadrado mas el Quadrado de AZ.. sera $2a^2+2ab+b^2$. tambien $2ab$ multipl.do por $AZ+\overline{AZ}^2$, es $= 2(a+b)a+b^2 = 2a^2+2ab+b^2$. Luego. &c.a

Por Numeros.

Sea AZ $=$ 2

sea ZB $=$ 3

sera $\overline{AP}^2+\overline{AZ}^2 =$ . . . . . . $25+4$

tambien . . . $2ab \times AZ+\overline{ZB}^2 = 20+9$

Luego. &c.a

Proposn. 8.a theore.a

Si una recta se divide por medio; y directam.te se le añade otra; el Quad.o de toda la Compuesta; es ygual â qua tro rectang.s hechos dela mitad dela en la Compuesta dela mitad dela dada, y la añadida, mas el Quadrado dela añad.da

Explicazion.

Sea la Recta AB dividida por medio en C, y añadida á ella la BD: sobre la toda AD formese el Quadrado AΘ, tirese la diagonal PD, por los puntos C y B paralelas al lado AP; y por K y R paralelas al Lado AB.

Demostrazion.

Siendo AΘ quadrado, lo sera tamb.n BN y MZ; y siendolo MZ estara dividido en quatro quadrados (P.n 31) y sg.s Los Rectang.s SH y KΘ estan hechos de SN y KS yguales á CA y CD, y KG ygl. CB; y tamb.n el Rect.o AK esta hecho como los dos antezed.s dela Mitad dela dada en la Compuesta de esta y la añadida; el Rectangulo CR, junto con el Quadrado KP se ve tambien que es ygual al Rectangulo AK

y si a todos estos se les añade
el Quadrado BN de la añadida BD
se tendra el Quadrado AQ de toda
la Compuesta. Luego. &c.

Por Letras.

Sea $AC = CB = \ldots\ldots\ldots\ldots a$

sea $BD = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b$

sera $AD = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2a+b$

y su Quadrado $= \ldots\ldots 4a^2+4ab+b^2$

tambien ... $4a(a+b)+b^2 = 4a^2+4ab+b^2$

Luego. &c.

Por Numeros.

Sea $AC = CB = \ldots\ldots\ldots\ldots 3$

$BD = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$

AD sera $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8$

y $AD^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 64 = 60+4.$

Proposon. 9 theorema.

Si una recta se divide en dos partes
yguales; y en dos desyguales; los Qua
drados delas partes desygs. juntos, son

yguales al duplo Quadrado dela Mitad dela dada, mas el duplo quadrado dela parte Intermedia.

Explicazion

Sea la Recta AB, dividida en dos partes yguales en C; y en dos desyguales en D: digo que $\overline{AD}^2$, mas $\overline{DB}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2$.

Preparazion.

Levantese en el Punto C la Recta CP ygual y perpendicular â AC: tirense AP y BP; por el punto D, DN paralela â CP; por N, NR paralela â AB, y finalmente tirese AN.

Demostrazion.

Los Quatro triangulos ACP, PCB, NDB, y PRN, son Isozeles Rectangulos (P.^n 32) y el triangulo Rectangulo ADN se tiene (Pro.^n 47), $\overline{AN}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DN}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$ y en el triangulo APN tambien Rectang.°

$\overline{AN}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PN}^2$: en el Isozeles Rec-
tangulo ACP, es $\overline{AP}^2 = 2\overline{AC}^2$; en el
Isozeles Rectangulo PRN es $\overline{PN}^2 = 2\overline{RN}^2$
$= 2\overline{CD}^2$: Luego $\overline{AP}^2 + \overline{PN}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2$;
y por Consig.te $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$

Por Letras.

Sea AC = CB = ... a

sea CD = ... b

sera AD = ... $a+b$

y DB = ... $a-b$

y p.r Consig.e . . . $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2a^2 + 2b^2$

Que son los duplos Quad.s dela mitad
dela dada, y la parte Intermedia.

Por Numeros.

Sea AC = CB = ... 5

sea PD = ... 2

sera AD = ... 7

y DB = ... 3

p.r lo qual se tendra $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 49 + 9 = 58$

tambien $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2 = 50 + 8 = 58$.

Propos.^n 10 theore.^a

Si una Reta se divide en dos partes yguales, y directam.^te se le añade otra; el Quadrado dela Compuesta junto con el Quadrado dela añadida es el duplo del Quadrado dela mitad dela dada y dela añadida.

Explicazion

Sea la Reta AB; la que este dividida por medio en C; y directamente añadida la BD: digo que $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 2 \times \overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2$.

Preparazion

Levantese CM ygual y perpendicular á CA: tirense MA, MB prolongada: por M, MR paralela á AD: por D, RS paralela á CM; y finalmente tirese AS.

Demostraz.^n

Los quatro triangulos ACM,

MCB, SMR, SBD, son Iguales rectangulos; por razon de las Paralelas; y por la (Proposicion. 32)

En el triangulo rectangulo ASD, se tiene (Pro.n 47)... $AS^2 = AD^2 + DS^2$

En el triangulo AMS .. $AS^2 = AM^2 + MS^2$

En el triang.o AMC ...... $AM^2 = 2 \times AC^2$

En el otro .. MRS ... $MS^2 = 2MR^2 = 2CD^2$

y p.r Consig.te sera .. $AM^2 + MS^2 = 2AC^2 + 2CD^2$

Luego .. $AD^2 + DS^2 = 2AC^2 + 2CD^2$. q.e es &a.

Por Letras.

Sea AC = CB = ... a

Sea DB = ... b

Sera AD = ... 2a+b

y su Quadrado Junto con el de BD

sera .. $4a^2 + 4ab + 2b^2$.

Pero $2AC^2 + 2CD^2 = 2a^2 + 2\overline{a+b}^2 =$

$= 4a^2 + 4ab + 2b^2$. Luego. &a.

Por Numeros.

Sea AC = CB = ... 3

Sea BD = ... 2

Sea AB = ... 8

y CD = ... 5

Y por Consiguiente $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 =$
$= 64 + 4 = 68.$

Pero $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2$, es tambien ygl.
$18 + 50 = 68$. Luego. &a.

Propos.n 11. Probl.a

Dividir una Recta dada en dos partes: de modo que el Rectangulo hecho dela toda en la una parte sea ygl. al Quadrado dela Otra.

Explicaz.n y operaz.n

Sea la Recta dada AB: formese sobre ella el Quadrado AC: Dividase BC por medio en G: tirese GA; y prolongando CB, cortese GM = GA; y sobre BM perfizionese el Quadrado BN, alargando el Lado NK hasta Cortar la AC.

Demonstrazion

Por La (P.n 6) se tiene $CM \times BM + \overline{BG}^2 = \overline{GM}^2$: Pero $\overline{GM}^2 = \overline{GA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2$; luego $CM \times BM + \overline{BG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2$; y quitando BG^2; quedara $CM \times BM = \overline{AB}^2$: Esto es el Rectangulo CN ygl. al Quad.o AC y si de ambos se quita el Rectangulo Comun CK quedara el Rectangulo KR ygual al Quadrado BN: Esto es el Quadrado dela toda entadra parte ygual al Rectangulo dela otra; que es lo que se avia de demostrar: La Recta AB se dize estar dividida en el punto K en media, y Extrema razon.

Propos.n 12 theore.a

En Qualquier triangulo Obtusang.o el Quadrado del Lado opuesto al Angulo obtuso es ygual alos Quadrad.s delos otros dos lados; mas dos Rectang.s Hechos del Lado sobre quien Cae, la perpendicular en el segmento comprehendido entre esta, y el Ang.° Obtuso.

Explicazion

Sea el triangulo ABR obtusangulo en B; sea RM la perpendicular q.e corte al Lado AB prolongado en M; digo que sera $\overline{AR}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BR}^2 + 2AB \times BM$.

Demostraz.n

En el triangulo Rectangulo ARM se tiene (Propos.n 47) $\overline{AR}^2 = \overline{RM}^2 + \overline{MA}^2$; pero (por la Propos.n 4.a) $\overline{MA}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BA}^2 + 2BM \times BA$; Luego $\overline{AR}^2 = \overline{RM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{BA}^2 + 2BM \times BA$. y siendo (Pro.n 47) $\overline{RM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{BR}^2$; sera $\overline{AR}^2 = \overline{RB}^2 + \overline{BA}^2 + 2BA \times BM$: que es lo q.e se havia de demostrar.

Por Letras.

Sea AB = ... a

sea BR = ... b

RA = ... c

BM = ... x

$RM = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p^{222}$

sera (Propⁿ. 17) $p^2 = bc - aa - 2ax - xx$,

en el otro triangulo RMB se tiene —

$p^2 = b^2 - xx$. Luego. $c^2 - a^2 - 2ax = b^2 - xx$

y por que xx, se destruyen se tendra

$c^2 - a^2 - 2ax = bb$; y añadiendo à una,

y otra parte, $a^2 + 2ax$, resultara —

$c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$. que es lo que Dᵒ.ª

✱ Corolario. ✱

Conocados los tres Lados de un —

triangulo Obtusangulo; se hallara fa

cilmente la perpendicular; por que

por Exemplo en el triangulo —

propuesto, si del Quadrado de

AR, se restan los Quadrados de

AB y BR sera la diferenzia 2AB —

multiplicado por BM, que partida

por 2AB dara el Valor de BM;

cuio Quadrado restado de el de —

BR, sera el dela perpendicular RM;

Propos.n 13 theore.a

En todo triangulo acutangulo, el quadrado del Lado opuesto an Angulo agudo; junto con dos rectangulos de uno delos Lados, que comprehenden el Angulo agudo sobre quien cae la perpendicular en el segmento comprehendido entre este y el ang.o es ygual alos quadrados delos otros dos Lados.

Explicazion.

Sea el triangulo ABD acutangulo en B: digo que si del angulo D, se baxa la perpendicular DC, sera $\overline{AD}^2 + 2AB \times CB = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$.

Demonstraz.n

Por estar la recta AB dividida en dos partes en el punto C sera (P.7) $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = 2AB \times CB + \overline{AC}^2$; y añadiendo á ambas partes $\overline{CD}^2$ se tendra $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 = 2AB \times CB + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$: pero

$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{DB}^2$ (prop.ⁿ 47) y
$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$ tambien p.r la (47)
Luego poniendo los Quadr.s delas Hi-
potenusas en lugar delos de los la-
dos; se tendra $\overline{AB}^2 + \overline{DB}^2 = 2AB \times CB$
$+ \overline{AD}^2$ que es lo q.e se avia de demostr.

Por Letras.

Sea $AB \ldots = a$
$BD \ldots = b$
$AD \ldots = c$

$DC \ldots = p$
$BC \ldots = x$
sera $AC \ldots = a - x$
y (Prop.ⁿ 47) $pp = cc - aa + 2ax - xx$
y por la misma $pp = bb - xx$.
Luego: $cc - aa + 2ax - xx = bb - xx$.
y añad.o xx se tendra $cc - aa + 2ax = bb$
finalm.te añad.o el quadrado aa resul-
tara $cc + 2ax = bb + aa$ q.e es
lo que se avia de demostrar.

Por Numeros.

Corolario

En qualq.r triang.o acutangulo, se hallara la perpend.r si del quad.o delos lados AB y BD se resta el quadr.o del lado AD q asi la difer.a se parte p.r el duplo del Lado AB quad.o despues el Cozciente rest.do, el quad.o del de DB; pues esta ultima difer.a sera el quad.o dela perp.r CD

fin del Libro 2.o

Libro 3.º

De las Propiedades del Circulo.

Y de las Lineas rectas que le tocan, cortan, y caen dentro de el.

Definiziones

Circulos Iguales, son aquellos cuyos diametros, ó semidiametros son iguales.

2.ª Linea tangente al Circulo es la recta, que tocandolo en un punto alargada no lo corta: tal es la recta AB tangente al Circulo P en el punto T.

3.ª Circulos tangentes son aquellos que tocandose en un punto no se cortan ya sea estando el uno dentro del otro, como el Circulo

CDR que toca al otro SOP en el punto R; ó ya sea encarrado fuera como el Circulo IMO.

Circulos Secantes son aquellos que de qualq.r modo se Cortan como H y G.

Circulos Concentricos son los que tienen un mismo Centro, como ABR, ISH y el espacio compreh.do entre los dos se llama Corona, ó anicho.

Circulos Exentricos son aquellos que tienen diverso Centro, aunque el menor este Contenido en el maior, como GMP, KDN.

Defin.n 4.a Cuerda, ó Subtensa, es qualq.a recta que esta dentro del Circulo terminada p.r una y otra parte en su Circunferencia como AB.

Dos Cuerdas qualesq.a AB, MX se dize que distan ygualm.te del Centro quando las Perpendiculares CR, CS

que desta vajan sobre estas son yguales y

si alguna fuese mayor, la Cuerda sobre

quien cayga se dira que dista mas

del Centro.

Linea secante del Circulo,

es qualquiera recta que le Corta; y asi

toda Cuerda es secante. La que co-

rta sea tangente o secante es propria deste

Arco, se dira esta Geonometria pratica

Defin.n 5.a Segmento del Cir

culo es una figura terminada por

la Cuerda y la parte del Circulo,

que subtende, asi la figura AFBR

es un segmento de Circulo, por estar

terminada por la Cuerda AB y el ar

co AFB Cuios extremos une esta Cuerda

Quando la Cuerda pasa por el

Centro divide al Circulo en dos

segmentos yguales y entonzes la Cuerda es

diametro: sino para por el Cen-
tro lo divide en dos segm.^s desyg.^s
y el que Contiene al Centro se llama
mayor, y el otro menor.

Defin.^n 6.^a Angulo del segm.^to
es el mixtilineo que forma el Arco
con la Cuerda tal es el ang.^o FAB

Defin.^n 7.^a Angulo segmento es
aquel que forman dos rectas, que
saliendo de sus extremid.^s concurren
en un punto de superifizia; y asi el
angulo BRS se dize recto en el seg-
mento BRS.

Definiz.^n 8.^a. este mismo an-
gulo se dize q.^e insiste en la Cir-
cunfer.^a opuesta BHS de suerte que
el ang.^o q.^e esta en un segmento,
insiste en el otro q.^e es la parte que
queda en el Circulo.

Defin.^n 9 Sector de un Circ.^o

es vna figura terminada por dos lados y el Arco comprehendido entre ellos como PCH.

Defin.n 15. Semejantes Segm.s del Circulo, son aquellos en que en los Ang.s q.e se forman son yguales; y asi si los angulos ASB, CHD son yg.s los Segm.s en que estan formados seran Semejantes. esto suzede quando los Circulos son desyguales, p.r que en siendo Ig.s los Segm.s lo seran tamb.n

Propos.n 1.a Probl.a

Hallar el Centro de vn Circulo.

Resoluzion

Sea el Circulo ABR tirese dentro deel qualq.r Cuerda AR dividase esta por medio en S, y en este punto

Levantese la vna perpend.r prolongada
hasta el Circ.o por vna y otra parte
dividase HB por medio en C y este
sera el Centro (si esta en dha Recta)
pero si se dixese que esta fuera de
ella y que es qualq.a otro como M,
tirense MA, MB y MR.
En este Caso los triangulos AMB
RMB seran (p.r 8.a del 1.o) totalmente
yguales, y por consiguiente yg.s, y rec
tos los ang.s MBA, MBR: pero
por construccion el Ang.o CBA es
tambien recto: luego los angulos
MBA, CBA son yg.s; y siendo es
to ympossible se sigue q.e el pun
to M no puede ser el Centro; lo
mismo se demuestra de qualq.a otro
punto q.e este, fuera dela Recta BH.
y deb.do estar en esta sera el punto
C sera el punto C q.e la divid.e p.r medio

Corolario

de aqui se infiere: que si del medio de vna Cuerda qualq.ª se levanta vna perpend.r esta pasara por el Centro.

Propos.n 2.ª theore.ª

La Cuerda Cae toda dentro del Circulo.

Explicazion

Sea la Cuerda AR: tirense los radios CA, CR; y a qualq.r punto P dela Cuerda tirese CP.

demostraz.n

Por ser el triang.º ACR ysosceles, sera el ang.º A = R: y siendo el ang.º CPR por externo, mayor q.e el angulo A (pr.n 16 del 1.º) sera tamb.n Mayor q.e el ang.º R luego en el triang.º CPR sera el lado CR > CP. luego el punto P no llegara ala Circunferencia; y demostrando se lo mismo de qualq.ª otro punto la Cuerda AR se sigue cae toda dentro del Circulo.

✱ Propos.ⁿ 3.ª theorema ✱

La recta que pasando p.ʳ el Centro de un Circulo parte por medio â otra qualq.ª que no pase por el; es perpendicular â ella; y si es perpendicular aella la divide en dos partes yguales, como tambien al Arco.

✱ Explicazion ✱

Sea MN el Diametro que divide la Cuerda AR por medio en el punto P: digo lo 1.º que es perpendic.ʳ â ella.

✱ Demostrazion ✱

tirados los Radios CA y CR; se ve que los triangulos CAP, CPR, son totalm.ᵗᵉ yguales (p.ⁿ 8.ª del 1.º) Luego los ang.ˢ en P. son yg.ˢ y por consiguiente rectos.

Lo 2.º digo que siendo AP perpendicular a la Cuerda AR, la dividira en dos partes yguales como tambien al Arco: porque los triangulos ACP, CPR tienen el Ang.º A ygual R (p.ª 5.ª del 1.º) los ang.s en P yguales y comun el Lado CP: luego (26 del 1.º) son totalmente yguales y por consig.te AP = PR; y el angulo ACP = SCR: con que lo seran tambien sus medidas, q.e son los Arcos AS y SR.

Propos.n 7.ª theorema

Si en el diametro de un Circulo se toma un punto q.e no sea en el Centro, y del se tiran rectas a la Circunf.a, la mayor de todas sera la parte del diametro que contiene el Centro; la menor el residuo, y de las otras la mas proxima al Centro sera maior que las mas apartada; y de dho punto solo pueden salir dos rectas. yguales ala Circunferen.ª

Explicazion

Sea el Diametro MS y el punto tomado en el sea N; en el qual se tiren las rectas NX y NA: digo lo 1.º que la maior de todas es SN.

Demonstrazion

tirados los Radios CX y CA en el triang.º ACN Los dos lados AC mas CN son maiores que AN y siendo AC = CS sera AC + CN = SN: luego SN > AN que era lo 1.º

Lo 2.º digo que la menor de todas es NM; porq.e en el triang.º XCN es (20 del 1.º) XN + NC > XC pero XC yg.l CM por ser radios luego XN + NC > CM y quit.do y la parte co mun CN quedara RR y RM.

Lo 3.º La RA mas prox.ª al Centro sera maior q.e RR mas apartada; porque los triangulos RCR, ACR teniendo los dos lados RC y CR yg.s alos otros dos AC y CR sera RA (prop.n 24 del 1.º) maior que RR por estar opuesto al maior Angulo.

Lo 4.º Contando con el Interv.º RA ala parte opuesta del punto A el Circulo RR solo la RR puede ser ygual ala RA por que qual quiera otra q.e se tire siesta mas prox.ª al Centro sera maior, y si mas apartada sera menor.

✠ Propos.n 9 theore.ª ✠

Si desd.e un punto dentro del Circulo se pudieren tirar mas de dos Rectas yguales ala Circunf.ª dho punto sera el Centro (es Const.^{o} dela 7.^{a}) por que pudiendo tirar vn Diametro, por qualq.^{a} punto que este dentro de vn Circulo se ha demostrado que de dicho punto solo pueden salir dos Rectas yguales ala Circunferencia.

Propos.^{n} 14 theore.^{a}

En todo Circulo las Cuerdas yguales distan ygualm.^{te} del Centro; y al contrario las que distan ygualmente del Centro son yguales.

Explicazion

Sea lo primero yguales las Cuerdas AB, SR: digo que distan ygualmente del Centro.

Preparazion

Baxense del Centro perpendiculares alas Cuerdas las CH, KC y tirense los Radios BC, CR.

demostrazion

Si en el triangulo rectangulo BHC es (47 del 1°) $\overline{CB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HC}^2$: por la misma en el triangulo CRK, es $\overline{CR}^2 = \overline{RK}^2 + \overline{CK}^2$: pero $\overline{CB}^2 = \overline{CR}^2$ luego $\overline{BH}^2 + \overline{HC}^2 = \overline{RK}^2 + \overline{CK}^2$; y siendo BH = RK; por que (propn. 3a) son mitades de las cuerdas yguales, sera $\overline{BH}^2 = \overline{RK}^2$ y quitando estos de los ultimos yguales, quedara $\overline{HC}^2 = \overline{CK}^2$: Luego las perpendic.s CH y CK son yguales; y por consiguiente las cuerdas distan ygualmente del centro.

Lo 2°. siendo $\overline{BH}^2 + \overline{HC}^2$ ygual $\overline{RK}^2 + \overline{CK}^2$ si se quitan los quadrados de CH y CK que son yguales, por suposizion, quedara $\overline{BH}^2 = \overline{RK}^2$ mitades de las cuerdas; estas seran tambien yguales.

Proposizn. 15 theorema.

La Mayor Cuerda de un Circulo es el Diametro; y de las otras la mas proxima al Centro es mayor que la mas apartada.

Explicazion.

Sea el Diametro AS y las Cuerdas MN, BR: digo que es $AS > MN$, y $NM > BR$.

Demostrazion

tirados los Radios MC, BC, RC, NC, en el triangulo MCN, los dos lados $MC+CN$ son mayores que MN (propor. 2. del 1.°) pero $MC+CN = AS$; Luego $AS > MN$. En los triangulos MCN, BCR que tienen dos lados del uno yguales â dos del otro, (sera 21 del 1.°) la base $MN > BR$; pero si la Cuerda BR ocurriese en el otro Semicirculo, y fuese por exemplo PH se encontraran las perpendiculares, CL, y CK yguales, y tirando la Cuerda BR sera ygual (propon. 14) â PH: Con que lo mismo se demostrava de un Lado que de otro.

Propon. 16 theorema

La perpendicular ala extremidad, de un Diametro, Cae toda fuera del Circulo, y es tangente; y entre ella y el Circulo no se puede tirar sin que Corte a esta recta alg.a al punto del Contacto.

Explicazion

Sea la AB perpendicular â la extremidad del Diametro AV: digo q.e Cae toda fuera del Circulo.

Demostrazion

tirada qualquier recta CH en el triang.o HAC rectangulo en A, sera el angulo H agudo

(32 del I.°) y por consig.^te (19 del I.°) el Lado CH 7 CA: pero CA es Radio: luego el Punto H Caera fuera del Circulo, y demostrandose lo mismo de otro punto qualq.^a se si gue que toda la Recta AB solo toca al Circulo en el punto A: que era lo primero.

Lo 2.° digo que entre BA, y el Circulo no se puede tirar ninguna Recta AL sin que corte â este: por que sacando del Centro la perpendicular CP en el triangulo Rectangulo PAC, sera (19 del I.°) CA 7 CP: luego el punto P Caera dentro del Circulo, y por consiguiente Cortara â este la AL.

✕ Corolario. ✕

De aqui se infiere que â qualq.^r Punto de la Circunferencia de un Cir

Culo, solo se puede tirar una tangen te, pues tirando un diámetro al pun to del Contacto, no se podra tirar a este otra Recta, sin que Corte al Circulo; y asi si se tiraren dos tan gentes al mismo punto (una de cada parte) haran una sola Recta cô por mejor dezir una sola tangente.

Scholio.

El Angulo BAC que forma la tan gente con el Circulo se llama Angulo del Contacto.

Propon. 17 Probla.

Dado un punto fuera de un Circo. tirar de el una tangente.

Explicn. y operazn.

Sea el Punto P pr. el qual se pide tirar una tange. al Circo. SLK: tirese la Recta PO y con este Intervalo descrivase el Circulo PRH, levantese en S la

perpendicular SR tirese RO, y ti
rando del punto L en q.e corta al Circ.o
la Recta PL, esta sera la tangente.

✻ Demostrazion ✻

Los triang.os OLP, ORS tienen los
dos Lados OL, OP del uno yg.s alos
dos OS, OR del otro, y los Angulos
comprehend.s yg.s, por ser del comun
en O: Luego (d.a del 4.o) son totalm.te
yguales, y p.r consig.e el angulo PLO
sera recto por ser ygual a su Corresp.te
OSR Luego (pro.n 16) la PL es tang.e

✻ Propos.n 18 Theore.a ✻

Si una recta toca aun Circulo, y des
de el Centro al punto del Contacto
se tira un Radio; este sera per
perdicular ala tangente.

✻ Explicazion y dem.n ✻

Sea la tang.e HL, y OL el Radio
tirado al Punto del Contacto; el

qual sera perpr. ala tangente; por
que sino lo fuese, bajada la Perpendicr.
OH; en el triango. HOL seria (17 del S.° 1
OL > OH; pero esto es ymposible pr. ser
OL = OH, Luego solo el Radio OL puede
ser perpendr. ala tangente.

✱ Proposn. 17 theorea. ✱

Si enla tango. deun Circo. se levanta-
una perpendr. en el Contacto: esta pa
sara por el Centro.

✱ Explicazn. y demostrazn. ✱

Sea la tangente LR y la perpendr.
RH: digo que pasa por el Centro.
porque si este fuese un punto X fue-
ra de ella; tirando la RX; los Angs.
LRH, LRX serian ygs. siendo rectos,
el uno por supon. y el otro pr. la (pn. 17)
pero esto es ymposible, por ser uno
parte de otro; se sigue qe. el Centro
no puede estar fuera dela perpr. RH.

Propos.ⁿ 2ª theorᵃ

El Angulo formado en el Centro, es duplo del formado en la Circunferª; quando ambos existen sobre un mismo arco.

Explicazion

Sea el Angº en el Centro A P R, y el formado en la Circunferª A H R existiendo ambos sobre un mismo arco A R digo qᵉ el 1º es duplo del 2º.

Demostracion

tirado por el punto H el Diametro H L; en el triangº Ysosceles A C H el angº externo O es duplo de H, (32) del 1º. Por la misma razon el angulo P. es duplo del l: luego O+P sera duplo de n+L: esto es el angº en el Centro duplo del formado en la Circª.

Si el Lado P S cortare al Lado Z M tirando por P, el Diametro P X en el trian y sus vertices ZMP sera $q+v=2x+2s$:

y en el otro triang.° PMS tamb.n y sus vo-
rtices sera $v=2s$ y quitando yg.s a yg.s
quedara $q=2x$: esto es el angulo
ZMS duplo del ang.° ZPS.

Corolario 1.°

El Angulo formado en la Circunf.a
AHR tendrá por medida la mitad del
arco AR porque todo este Arco
es medida del ang.° en el Centro
ACR.

Corolario 2.°

Si en un Circ.° se tiran dos Cuerdas pa
ralelas AB, RH; Los Arcos que con
tienen AR, BH, seran yg.s porque tiran
do AH; los ang.s alt.s x, y z son
yguales; y teniendo p.r medida la mit.d
de d.hos arcos los duplos seran
tamb.n yg.s; esto es el arco AR = al
Arco HB ~

✠ Scholio 1.º ✠

Si se Cortan dos Cuerdas AH, MR por vn punto qualq.ª C dentro de vn Circulo, la medida del ang.º ACR y q.e MCH sera la mitad del arco AR mas la mitad del arco MH; por que tirando AM, en el triang.º AMC el ang.º externo ACR es ygual a los ang.s, S + P (32 del 1.º) pero el ang.º S tiene p.r Medida la mitad del arco AR el ang.º P la mitad de RH, luego el externo ACR tendra por medida la mitad de los angulos AR, MH.

✠ Scholio 2.º ✠

Si de vn Punto M fuera de vn Circulo se tiran dos Secantes MF, MH sera la medida del ang.º M la mitad de la difer.ª de los Arcos OL, y FN por que ti rando por el punto L, la LG paral.ª a MH

Seran los arcos (cor.º 2.º) OL FG yguales,
y el angulo M = GLH, pero este tiene
por medida la mitad del arco GH;
luego el angulo M tendra tambien
por medida dha mitad que es la
semidiferen.ª delos arcos OL FM

Escholio 3.º

Si à un Circulo, se tira una tang.te
RH y del Contacto una Secante HP;
La medida del angulo RHP sera
la mitad del arco HP porque tiran
do por el punto P la PL paral.ª a GR
ò perpend.r al Diametro HX Los ar
cos LH, HP seran yguales: y el
angulo RHP = HPL: pero este ul
timo tiene por medida la mitad del
arco LH Luego el angulo RHP
tendra tambien por medida la mitad
del arco HP; por ser los arcos
HP y HL yguales.

Propos.n 21 theorema

Los ang.s en un mismo segmento ô q.e ynscriten sobre un mismo arco son yguales.

Sean los angulos AMR, AXR se Infiere dela (20) que son yguás, por que uno y otro tienen por medida la mitad del arco AR.

Propos.n 22 theorema

Los ang. opuestos delas figuras Quadilateras ynscriptas en el Circulo son yguales a dos rectas.

Explicazion

Sea el Quadrilatero ynscripto AX: digo que la suma delos ang.s opuest. M+R es ygual â dos rectos.

Demostrazion

El Angulo R tiene por medida la Mitad del arco AMX, y la mitad delo restante del Circulo es la-

Medida del Angulo M: Luego sien
do la medida de Ambos el Semicirc.º
seran Yguales á dos Rectos.

Propos.n 25 Probl.a

ACavar vn Circulo: Dado vn arco
ó porcion de el.

Resoluzion.

Sea el arco dado MHR: tirense
en el dos Cuerdas MH, HR: divi
danse estas por medio en los puntos
F, S, y levantando en estos perpen
diculares; el Punto C en que se cor
ten sera el Centro; con lo que to
mando el Interv.º CH se concluyra
el Circulo.

Demostrazion.

Por el Cor.º dela (prop.n 1.a) esta
ra el Centro del Circulo en las per
pend.s FC y SC: luego sera preci
sam.te el Centro el punto C enq.e se cortan

y p.r Consig.te sera el Radio CH del Circulo que se pide acavar.

Corolario

Dados tres puntos MHR se podra s.pre hazer pasar un Circulo p.r ellos, como no esten en Linea recta.

Propos.n 30 Problema

Dividir un Arco ABC en dos partes yguales.

Resoluzion

tirese la Cuerda AC, dividase p.r medio en H y levantando la perpendicular HB quedara el Arco dividido p.r esta, como se pide.

Consta del Cor.o de la (p.n 1.a) y (3.a)

Prop.n 31 Theore.a

El Angulo formado en el semicirculo es recto, el formado en el mayor segmento es agudo:

y obtuso el formado en el me-
nor segmento.

Demostrazion

El Angulo ARB hecho del se-
micirculo tiene por medida lamitad
del (Cor.° 1.° p.ª 20) luego es recto;
El Angulo RAB hecho del ma-
yor segmento tiene por medida la
mitad del arco RXB menor que
el semicirc.°; luego es agudo: el
ang.° RXB formado del menor
segmento tiene por medida la mitad
del arco RAB, maior q.e el se-
micirculo, Luego es obtuso.

Scholio.

Queriendo tirar desde punto qualqui-
quiera L, una tangente al Circ.°
C se tirara al Centro la recta
LC, y descrivien.do sobre esta un se-
micirculo, tirando al Punto L la recta

LM se tendrá la tangente, porque si se tira CM, el ang.° CML será recto, y (p.n 16) LM tang.te

Propo.n 32 theore.a

Si una recta es tangente a un Circ.° y del punto del contacto, va tenga secante, los ang.s que forme la tang.e con la secante serán yguales á los que se formen en sus segmentos Alternos.

Demostrazion

Siendo la tangente RS, y la secante SB: será el angulo RSB ygual á SAB por que uno y otro tienen por medida la mitad del arco SB: el 1.° (p.r el sch.° 3.° dela p.n 20); y el 2.° (Cor.° 1.° dela misma)

Lo mismo se demuestra del angulo obtuso.

Prop.n 33 Probl.a

Sobre una Recta dada des
cribir un Segmento de Circulo,
Capas de recibir un angulo ygl.
á otro Angulo dado.

Resoluzion

Sea la Recta AB, y el Angulo
prop.to R: descrivase sobre AB
el Ang.o BAS ygual R: sobre SA
levantese la perpendicular AC, y en
el punto B formese el angulo ABC
ygual X, con lo qual (pr. 6.a del 5.o) se
tendra $CA = CB$ y descriv.do un Cir
culo con este Radio se tendra el
Segmento ACB Capaz de recivir
un angulo ygual al dado.

Demostrazion

La Recta SA es tang. al Cir
culo en el Punto A (pr. 16): luego el
angulo SAB q.e es ygl. al dado R
será ygual á qualq.a q.e se forme,

en el Seg.to AZB.

Si el Ang.o fuere Obtuso como M se hará la misma operaz.n con el ang.o R su difer.a a dos Rectos: y en este Caso seria el Seg.to AFB por la misma (32) el Capaz de recivir el Angulo Obtuso M.

Propos.n 34 Probl.a

De un Circulo dado; Cortar un Segm.to, Capaz de recivir un ang.o ygual à otro Angulo propuesto.

Resoluzion

Sea el Angulo X y el Circulo HKS; tirese a este una tangente qualquiera RH y en el Punto H formando el Angulo RHS ygual al dado X se-ria el Segm.to HKS el q.e se pide Consta de la (prop.n 32)

Las proposiz.s 35, 36, y 37, se daran al fin del Libro 6.o

FIN

+

Libro 6.º

De la razon y Proporcion de las figuras planas

Definiziones

1.ª

figuras Rectilineas semejantes; son las que tienen todos sus ang.s yguales. Cada uno a su Correspondiente, y proporzionales los Lados, que comprehenden yguales Ang.s: de modo que los triang.s ABC, RHM seran semejantes si tienen, el Ang.º A ygual R, B = H, y C = M: siendo ademas de esto pp.s

AC . . AB : : RM . . HR
AB . . BC : : RH . . MH
BC . . CA : : HM . . MR

Lo mismo q.e se dize de los triang.s se entiende de las demas figuras Rectilineas: y siempre los Lados, que se oponen a q̃ṡ. angṡ. se llaman homologos.

Definiz.ⁿ 2.ª

Figuras Reciprocas son aquellas q.ᵉ tienen Reciprocos los lados, q.ᵉ comprehenden iguales Angulos; y asi los Paralelogramos AR, NK se dira que son Reciprocos, si siendo el ang.ᵒ A = N son proporcionales. CA..MN::NH:AB

Esto es q.ᵉ el 1.ᵒ y 4.ᵒ termino esten en una figura, y el 2.ᵒ y 3.ᵒ se hallen en otra. Lo mismo se entiende delos triangṡ y demas figuras Rectilineas.

Definizion 3.ª

Linea dividida en media y extrema Razon, es la que lo està en dos partes; de tal modo, que la toda, tenga el segmento mayor la misma Razon que este al menor; y asi la Recta AB se dira q.ᵉ està dividida en media, y extrema razon en C (si son proporzio.^s AB . . AC :: AC . . CB.

Definizion 8.^a

Altura de una figura, es la perpendicular que cae del vertize sobre la base; y asi en el triang.^o RVC: tomando RV por base; si del vertize C, se baja sobre ella, la perpendicular CA esta sera la Altura: pero advirtiendo, que esta altura es respecto âla base RV; porq.^e si qualesq.^a otro lado se tomase por base seria la Altura diferente, pudiendo ser ya ygual, ya maior, ô menor que CA: de suerte q.^e sp.^re q.^e se hable de la Altura se ha de determinar respecto de q.^e base.

De aqui se sigue, que si en un triang.^o rectangulo se toma por base uno de los lados, q.^e comprehenden

el Ang.º recto sera el oxo la altu-
ra del triangulo. tambien se sigue
que si dos triang.s AQF, AQH tienen
el vertice comun, y sus bases en vna
misma linea Recta, ô bien estan en
entre vnas mismas paralelas AF, KL
tendran vna misma altura QO.

Lo que se dize delos triang.s se
comprehende delas demas figuras
Rectilineas.

Definiz.n 5.a

Semejantes Arcos de Circulo;
son aquellos, q.e tienen ygual razon
ala Circunfer.a de quien son partes:
fasi los arcos AR, SH seran se-
mejantes: por q.e siendo ygs. en grad.s
tendran yg.l razon ala sus Circunferencias.
esto es la circufer.a ARM sera ala
Circunf.a SHP. como el Arco AR
al Arco SH. como consta por la (15)

del 5°)

Propⁿ 1ª theorª

Los paralelogramos, y triang. qᵉ tienen vna misma, ó yg.l altura tienen la razon de sus bases.

Explicazion

Sean los Paralelog. X y Z que tengan vna misma, o ygual altura MH: digo que tendran la razon de sus bases: esto es qᵉ seran proporzionales. X . Z :: AR . RS.

Demostrazion

Siendo los Paralelogramos (esto es sus superfizies) el producto de la base por la altura sera el paralelog.º $X = AR \times HM$, y el paralelogr.º $Z = RS \times HM$: pero (p.r la 15 del 5°) son pp. $AR \times MH . RS \times MH :: AR : RS$. (11 del 5°) Luego el Paral.º X es al Paral.º Z como AR a RS. que es lo que &c.

lo mismo se entiende de sus triang.s p.r ser sus mitad

Corolario

De aqui se infiere, que si los paralelogramos tienen bases yguales; y desyguales alturas, tendran la razon de sus alturas y si sus bases y alturas fuesen yguales los paralelogramos lo seran tambien; y deviendo entenderse de los triangulos, por ser mitades de los paralelogramos.

Proposicion 2ª theorema

En qualquier triangulo, la Paralela a un Lado corta a los otros dos en segmentos proporcionales; y la recta que Corta proporcionalmente dos lados de un triangulo es paralela al otro.

Explicazion

Sea el triangulo ABC y la recta HR paralela al Lado AB digo lo 1.° que son proporz. AH . HC :: BR . RC .

Demostrazion

Tiradas las rectas AR, HB los tri.

ARH, BHR, seran ygu.s (37 del 5;
(7 del 5.º) seran pp.s el triang.º ARH,
.: HRC :: BHR .. HRC. tambien por
tener los triang.s ARH, HRC vna
misma Altura (def.n 4.a) seran (p.n 1.a
como sus Vases. esto es; el triang.º
ARH .. HRC :: AH .. HC. por la misma
raz.n son pp.s el triang.º BRH .. HRC :: BR
.. RC. luego (11 del 5.º) AH . HC :: BR
.. RC. que era lo primero.

Lo 2.º Digo, que siendo proporz.s
AH .. HC :: BR .. RC sera HR paralela
a AB. porq.e siendo proporzional.s
ARH .. HRC :: AH .. HC, y BRH .. HRC
:: BR .. RC sera (11 del 5.º) ARH .. HRC
:: BRH .. HRC. Luego 9 del 5.º; los
triang.s ARH, BHR son yguales; y
teniendo vna misma Vase estan
do puestos acia vna misma parte,
estaran (39 del 1.º) entre vnas mism.s

paral.s esto la recta HR sera paral.a al Lado AB que era lo seg.o

Propos.n 3.a theore.a

En qualquier triang.o la recta que divide por medio un ang.o qualquiera divide el Lado opuesto en segmentos proporzionales a los otros dos lados; y al contrario la recta que divide un lado proporz.l m.te a los otros dos; dividira por medio el ang.o opuesto à dicho Lado.

Explicazion

Sea el triangulo MBC y la recta CR que divida por medio el angulo C: digo lo 1.o que dividira el Lado opuesto MB, de modo q.e seran pp.s MR . RB :: MC . CB

Preparacion

Prolongese el Lado BC hasta H de modo que CH sea ygu.l CM y tirese MH.

Demostrazion

Por la (5.ª del 6.º) es el ang.º S = H

y por la (32 del mismo) se tiene —

X+Z = S + H : Luego X = S y siendo

alternos seran CR y MH paralelas.

luego (Pr. 2.ª) seran pp.s MR .. RB ::

HC, ô bien MC .. CB que era lo prim.º

Lo 2.º digo, que siendo proporz.s

MR .. RB :: MC, ô bien HC .. CB sera

el Angulo X = Z, por que (pr. 2.ª) CR

es paralela â MH : Luego (29 del

1.º) el ang.º X = S y Z = H y siendo

H = S sera tamb.n X = Z q.e era lo 2.º

Propos.n 4.ª Theore.a

Los triang.s Equiangulos; los La

dos que Comprehenden angulos

yguales son pp.s, y los q.e se oponen

a yguales angulos son homologos.

Explicaz.n

Sean Equiang.s los triang.s CMB, SRH

de modo q.e el ang.o C sea ygual S.
M = R, y B = H: digo que los Lados
que Comprehenden yg.s ang.s son pp.

Demostrazion

Considerese q.e el triang.o CMB se
pone sobre el triangulo SRH y siendo
el Angulo C = S se ajustara exaccam.te,
y el Punto M vendra à M; y B. à B.
Con lo qual siendo el Angulo X = R,
las rectas MB RH seran paralelas,
y (p.r 2.a) seran pp.s RM. MS :: HB. BS.
y Componiendo. RS. MS :: HS. BS.
y alternando... RS. SH :: MS. SB.
Lo mismo se demostrara delos lados
que Comprehenden los demas Ang.s
luego seran todos pp.s y p.r Consig.e
los q.e se opongan à ang.s yg.s seran
homologos.

Corolario 1.o

teniendo los triangulos equiangulos

prop.s los Lados q.e Comprehenden ig.s ang.s seran (p.r la 1.a) Semejantes.

Corolario 2.°

En qualquier triang.o si se tira una paral.a aun Lado se formara otro triang.o Semejante al total: por q.e (p.r 29 del 1.o) sera equiangulo; y si amas dela Paralela se tira del angulo Opuesto una recta q.e Corte a las dos paralelas, las dividira en segmentos proporcionales; porque siendo..... MP . PS :: RN . NS
y..... PS . PB :: NS . NH
sera (2.° del 5.°) MP . PB :: RN . NH
Luego (p.r

Prop.n 5.a theor.a

Los triang.s que tienen los lados proporcionales son Equiangulos y los ang.s q.e se oponen alos lados homologos, son yguales entre si. ~

Explicazion

Sean los triangs. HMR. SLP: digo que teniendo los lados pps. seran equi angulos.

Preparazion

En el punto L. formese el Ang.° Z ygual M. en el punto P. el ang.° r = R con lo qual el 3.° X sera ygual al 3.° H. (32 del 1.°)

Demostrazion

Los triangulos MRH, LPX son semejantes (pr. 4.a) y por consiguiente proporzs. ... HM.. MR :: XL.. LP. tambn. pr. lo sup.to pps. .. HM.. MR :: SL.. LP Luego (11 del 5.°) .... XL.. LP :: SL.. LP y pr. consign. (pn. 9 del mismo) las rectas XL, y SL son yguales; lo mismo se demues tra delos lados XP, y PS: y teniendo los triangs. XLP, PLS, los tres lados ygs. seran (8.a del 1.°) totalmte. yguals.

y pr. Convio. el ang. Z = O: y el ang. V = Q: pero por Construcion es el angulo Z = M: el ang. V = R: Luego M = O y R = Q: Con lo qual los triang. MHR, LVP seran Equiangulos. por qe (pn. 32) el ang. H deve ser ygual ~~~~~~~~~~~~~~~~

Corolario

Los triangs. que tienen los Lados pps. son semejantes.

Proposn. 6.a theorema

Si dos triangs. tienen un angulo ygual; y los Lados qe le comprehen pps. seran Equiangulos.

Explicazion

Sean los triangs. ABC, RHC que tengan el angulo C ygl. o comun, y los Lados qe le comprehen pps. digo que son Equiangulos.

Demostrazion

siendo p.r lo supu.to AC..CB::RC..CH
sera altern.do ... AC..RC::BC..HC
y dividiendo... AB..RC::BH..HC
Luego (p.r 2.a) RH es paralela a AB: y
(Corol.° 2.° p.r 1.a) seran equiang.s los triang.s ACB, RCH: y por Consig.te
semejantes.

Prop.n 8.a theore.a

En todo triangulo rectangulo si del angulo recto, se baja una perpend.r sobre la Hipotenusa; quedara dividido el triangulo, en otros dos semejantes entre si, y al total

Explicazion

Sea el triangulo rectangulo ARB. Digo que la perpendicular RH lo divide en dos triang.s semejantes entre si, y al total.

Demostrazion

Por la (32 del I.°) es el ang.° B

=X : por la misma el angulo Z=A
Luego los triangs son equiangs. y
cpr. 41 semejantes.

✱ Corolario 1.º ✱

Qualq.ª Lado de un triang.º rectang.
es medio proporcional entre la Hi
potenusa y el segmento adiazente
porque por la semejanza de los
triangulos ARB, RXA son pp.s
BA.. AR :: AR.. AX.

✱ Corolario 2.º ✱

La perpend.r RX, es media pp.l
entre los segm.s AX, y XB: porq.e
siendo los triang.s AXR, RXC
semejantes seran proporcion.s
AH... HR :: XR.. XB.

✱ Propos.n 7 Problema ✱

1 De una recta dada Cortar la par
te que se quisiere.

✱ Explicazion. ✱

Sea la recta AB: dela qual se quie
ra (por exemplo) la terzera parte.

Resoluzion.

Formese sobre esta vn Ang.º qualq.ª
BA3: tomense desde A enla recta A3
tres partes yguales A1, 1.2, 2.3; tire
se la recta 3B, y paralela a esta por
el punto 1, la 1R la qual determina
ra en el punto R, la terz.ª parte de
AB.

Demostrazion

Por ser 1R paralela á 3B seran
propˢ (propⁿ. 2ª.) A1..1.3 :: AR..RB.
y Componᵈᵒ..... A3..1.3 :: AB..RB
pero 1.3; es los $\frac{2}{3}$ de A3: Luego RB
es los $\frac{2}{3}$ de AB y p.ʳ Consiguiente
AR, $\frac{1}{3}$.

Propos.ⁿ 10 Problema

Dividir vna recta dada en partes
semejantes á las de otra dada.

Explicazion

Sea la recta CD la que se pide di
vidir en partes semejantes a las
de la recta AB.

Resoluzion

Formese con las dos rectas, el
angulo BAH; tirese BH y paral.^s
a ella por los puntos R y S las
RP, SL estas dividiran a la AH:
como se pide.

Demostrazion

Siendo RP paralela a BH seran
pp.^s Cp.^n 2.^a BR..RA::HP..PA.
y componi.^do ..BA..RA::HA..PA:
Lo mismo se demuestra de las de
mas partes; luego la recta AH
esta dividida, como se pide.

Propos.^n 55 Proble.^a

A dos rectas dadas hallar una
tercera proporcion.

Resoluzion

Sean AB, RH las rectas dadas: formese qualq.^r angulo rectilineo, y con tense en el SL = AB. LM = SN = RH tirese NL y por el punto M parallela a ella la MK y la parte NK sera la tercera proporz.^l que se busca: p.^r que por la (prop.^n 2.^a) son proporz.^s SL . LM :: SN . NK esto es poniendo sus yguales AB . RH :: RH . NK.

Scholio

Si se huviese de hallar a tres rectas dadas una quarta proporzional, se cortaria SM ygual a la tercera y con la misma operazion sera NK la quarta proporzional. (esta es la proposizion 12).

Proposn. 13 Problema

Entre dos rectas dadas; hallar una media proporcional.

Explicazion

Sean las dos Rectas dadas AB, RS entre las quales se pide una media proporzional.

Resoluzion

Tirese una Recta HP = AB y prolongada Cortese PL = RS sobre la HL como diametro descrivase un semic.º y Levantando en P la perpend.ª PZ. sera la media pp.l que se busca.

Demostrazion

tiradas las rectas ZH, LZ se tiene el triang.º HZL rectangulo en Z, (prop.n 31 del 3º) y siendo ZP perpendicular ala Hipotenusa HL: sera (Cor.º 2.º pr.n 8.a) Media prop.l entre HP y PL: esto es entre AB y RS.

Lema.

Qualesq.a dos Paralelogramos o triang.s tienen entre si la razon

Compta. de vase y altura.

Explicazion

Sean los dos Rectang. AC, RH: es evidente que si delas dos Raz.s AB..RS, y BC..SH se forma la Compta. AB×BC..RS×SH los Rectangs. estan en esta Razon: por qe. el Rectangulo AC = AB×BC: y el Rectang.o RH = RS×SH.

Si los paralelog.s fuesen obliquangulos como PS, LX tendran tambien la misma propiedad, pues son yguales alos Rectang.s NE DM (35 del 1.o).

Lo mismo sucede con los triang.s por ser mit.s delos paralelog.s,

Corolario

Si los Paralelog.s PS, LX fuesen yguales, tendran vases y alturas reciprocas; por que siendo PR×PN = LM×LD seran pp.s (Lemma 1.o), PR..LM::LD..PN.

tambⁿ. siendo las bases y alturas reci-
procas: esto es PR..LM::LD..PN se-
ran los paralelogramos yguales; pᵈ.
que pᵈ. el mismo Lema del Libro 5º.
es PR×PN=LM×LD.

Propos.ⁿ 14 theorema.

Los paralelog.ˢ yg.ˢ que tienen un
angulo ygual; tienen reciprocos los
Lados que comprehen yg.ˢ angulos; i
y al contrario teniendo reciprocos
los lados, y el ang.º q.ᵉ comprehen-
den ygual, seran yguales.

Explicacion.

Sean los Paralelog.ˢ yg.ˢ AP, LF que
tengan el ang.º A=L: digo lo 1.º que
seran reciprocam.ᵗᵉ pp.ˢ AR..LX::LN..AM.

Demostrazion

Baxadas las perpendiculares HM, NS.
seran Equiang.ˢ los triang.ˢ AMH, LSN
por q.ᵉ tienen el angulo A=L el ang.º

en M = al ang.° en S, por ser rectos, y el 3.° (p.n 32 del 1.°) ygual al 3.°; luego (prop.n A) son pp.s SN..NL :: MH..HA. y alternando.... SN..MH :: NL..HA pero siendo los paralelog.s yguales tienen en p.n el (Cor.° del Lemma antezed.e) las vases y Alturas Reciprocas, esto es AR..LX :: SN..MH (Luego 11 del 5.°) AR..LX :: NL..HA que era lo primero.

Lo 2.° Digo que siendo proporzion.s AR..LX :: NL..HA y teniendo los ang.s Compreh.s de estos lados yg.s seran tamb.n yg.s los Paralelog.s por que como esta demostrado, son pp.s SN..MH :: NL..HA (Luego 11 del 5.°) AR..LX :: NS..MH y Cor.° del Lemma antezed.e seran yg.s los Paralelog.s

Propos.n 15 theorema

Los triang.s yg.s que tienen un angulo yg.l tienen Reciprocos los lados

que comprehenden ygs. angs. y si
tienen reciprocos los lados qe. compre
henden ygs. angs.: los triangulos
seran yguales.

Se ynfiere de la antezede. por-
ser los triangs. mitad de los parale
logramos.

Proposn. 16 theorema.

Si 4 rectas son proporzionales
el rectango. hecho de las extremas, es
ygual al formado de las medias.
y al contro. si los rectangs. son ygs.
las quatro rectas seran proporzs.

Explicacion.

Sean pps. las 4 rectas A, B, C, D; Digo
que el recto. AP hecho de las extre-
mas; es ygl. al recto. PS hecho de
las medias.

Es evidte. pr. qe. siendo pps. las
4 rectas A..B::C..D sera AD = BC

esto es el Rect.^o AB = al Rectang.^o CD
tambien siendo Ad = bc (esto es)
siendo los Rect.^s yg.^s seran tambien
las quatro Rectas proporzionales
A..B :: C..D consta p.^r el lema del 5.^o;

Propos.^n 17 theore.^a

Si tres Rectas son Continuas pp.^s
el Rectang.^o hecho delas Extremas
es ygual al Quadrado dela media
y si este es ygual al Rectang.^o delas
extremas, las tres Rectas seran
Continuas proporcionales. La de
mostrazion viene a ser la misma
que la dela propos.^n antezed.^te

Propos.^n 18 theore.^a

Los triang.^s semejantes tienen
entre si la razon duplicada de
sus lados homologos.

Explicazion

Sean los triang.^s semejantes ABR.

HLM: digo q.e tienen la razon dupli
cada de qualesq.a lados homologos
AB,HL.

Demostrazion

Bajadas delos ang.s R,M las perpen
diculares RX, MP; los triang.s ARX
HMP seran equiang.s y semejantes
p.r tener el ang.o A=H: Los angulos
en X y P rectos y el 3.o ig.l al 3.o (p.r 32 del 1.o)
Luego seran pp.s XR..RA::PM..MH
y alternando..XR..PM::RA.MH
tamb.n en los triang.s totales son pp.s
RA..AB::MH..HL y alternando
RA..MH::AB..HL. (Luego 11 del 5.o)
XR..PM::AB..HL esto es la razon
delas bases ig.l ala delas alturas:
pero los triang.s estan en razon com
puesta de bases y alturas, luego es
taran en la duplicada de qualquiera
de ellas: esto es tendran la razon -

duplicada delos lados homologos ABHL

Corolario. 1.°

Siendo la razon delas Alturas ygual ala delas Bases; estaran en razon duplicada los triang.° semejantes de sus alturas.

Corolario 2.°

teniendo los Quadrados la razon duplicada de sus Raizes; los triang.° semejantes seran como los Quadrados de sus lados homologos y como los Quadrados de sus alturas.

Corolario 3.°

Si alos Lados homologos se hallan una tercera proporcional sera el quadrado del primer lado, al quadrado del segundo, como el Lado prim.° ala tercera proporcional y la misma razon tendran los triangulos semejantes.

Propos.n 2. theore.a

Los Polygonos semejantes, se di
viden en ygl. Numero de triang.s
semejantes y Proporcionales á
sus todos; y tienen la razon dupli
cada; ó bien son como los Quad.s
de sus Lados homologos.

Explicazion

Sean los Polig.s semejantes AC, MZ
tirense de quatq.a ang.s yg.s S y F,
rectas alos demas angulos; con
lo que, quedaran los Poligonos di
vididos en ygual Num.o de triang.s.
Los quales digo que seran seme
jantes á sus correspondientes.

Demostrazion

Los triang.s ARS, MKF tienen el
ang.o R=K, y los Lados q.e lo Com
prehenden pp.s (p. sup.n) luego (p.n 6.a)
son Equiangulos, y p.r Consiguiente

el angulo O=V y el ang.° X=Q: tam
bien, los triang.s BCV, NZF son
Equiang.s y por Converio.te el Ang.° N=Z
y T=H: Luego x+z = q+n que quita
dos delos y q. en V y F, quedara el
angulo q= d; tamb.n quit.do y q.s de y q.s
sera el Ang.° L = 3, y el ang.° E = 4.
Luego los triang.s AVB, MFN son e
quiangulos. del mismo modo se de
mostrara la semejanza delos triang.s
aunq.e los Polig.s tuviesen mas Lados.
Siendo ya Cada triang.° un polig.°
semejante al Corresp.te del otro po
ligono sera el triang.° ARV.MKF :: $\bar{A}\bar{S}$.$\bar{N}\bar{F}$
:: AVB .. MFN :: $\bar{V}\bar{B}^2$ .. $\bar{F}\bar{N}^2$ :: VCB .. FZN.
(prop.n 19) Luego siendo todos los
triang.s pp.s seran por la (12 del 5.°)
todos los que Componen el poligono
AC a todos los q.e Componen el po
ligono MZ, como qualq.a de ellos,

á su semejante; y por consig.te co
mo los quad.s de qualesq.a lados,
homologos.

Corolario.

Si a qualesq.a dos lados homologos
AB MN se busca una terzera pp.l
el polig.o AC sera al polig.o MZ como
AB a la terzera proporcional.

Propos.n 21 theore.a

Los poligonos semejantes a
otro, son semejantes entre si.
se demuestra facilm.te p.r la (11 del 5.o)
respecto de ser las razones en
unos y en otros yguales.

Prop.n 22 theore.a

Si 4 rectas son proporzionales;
los rectilineos semejantes des
criptos sobre las dos primeras
seran tambien pp.s a otros qua
lesq.a semej.s descriptos sobre las

dos Ultimas.

Explicazion

Sean pp.s AB..RM:: SH..ZN.

Sobre AB y RM esten formados los triang.s semejantes ABL, RMK y sobre las otras dos rectas los quadrilateros tamb.n semej.s SP, ZX dig.o q.e los triang.s seran pp.s con los quadrilateros.

Demostrazion

Por ser pp.s AB..RM:: SH..ZN seran tamb.n proporcion.s sus quadrados: esto es $\overline{AB}^2..\overline{RM}^2::\overline{SH}^2..\overline{ZN}^2$ pero el triang.o ABL es al triang.o RMK como $\overline{AB}^2$ à $\overline{RM}^2$ (p.n 19) y el rectilineo SP..ZX:: $\overline{SH}^2..\overline{ZN}^2$ (p.n 20) luego (11 del 5.o) el triang.o ABL al tri.o RMK como el rect.neo SP a su semejante ZX.

Si los rectilineos fuesen pp.s

se vé tamb.n Claram.te que lo se
ran las Rectas.

Propp.on 23 Theo.a

Los paralelog.s Equiang.s tienen la razon Comp.ta delos Lados, q.e comprehenden yguales Angulos.

Explicazion

Sean los Paralelog.s Equiang.s HE. LX y tirense en ellos las perp.s FV KZ.

Demostraz.n

Los triang.s HVF, LKZ son semejantes; luego seran proporz.s VF..FH::ZK..KL, y alternando sera.. VF.ZK::FH..KL: esto es la razon delas alturas ygual ala delos Lados FH, KL: pero los Paralelog.s estan por el Lema, en razon compuesta delas bases y alturas; luego tamb.n lo estaran en la

Comp.ta dela delas Vases HR, LM, y la de los lados HF, LK: esto es seran pp.s el Paralelog.o HP, al paralel.o LX, como HR X HF á LM X LK.

Corolario.

Los triang.s que tengan un ang.o ygual tendran la razon Comp.ta de los Lados, que le Comprehendan; pues estan, como los paralelog.s en razon Comp.ta de vases y alturas.

Propos.n 24 theore.a

En todo Paralelog.o Los paralelog.s que Corta la diagonal; son semejantes entre si, y al total.

Explicazion

Sea el Paralelog.o RH: digo que los otros RX, XH por quienes pasa la diag.l son semejantes entre si y al total.

Demonstrazion

por razon delas paral.s FP, RM los triang.s RMH, NPH son semej.s por Conv.e pp.s RM. MH :: FP. PH y pon.do en lugar de RM = KH y en lugar FP su ygual SH seran prop.s HK. HM :: SH. HP Lo mismo se demuestra delos demas Lados, q.e Comprehenden los otros Angulos: luego el paralelog.o FH sera semejante al total. La demost.n del Par.o RF es la propia: luego los dos par.s RF, FH son semej.s entre si y al total.

Propos.n 30 Probl.a

Dividir una Recta dada en media y extrema razon.

Operazion

dividase la Recta AB demodo que el Rectangulo hecho dela

toda dcha parte CB, sea ygual al
quad.º de la otra parte AC (pr. 11
del lib.º 2º) y con esto quedara divi
dida en media y extrema razon,
por que por la (pr. 17) seran pp.s
AB . . AC : : AC . . CB.

✻ Propos.n 31 theore.a ✻

En qualquier triang.º rectang.º
el recil.º descripto sobre la hi
potenusa, es ygual â los recil.s
semej.s descriptos sobre los o-
tros dos Lados.

✻ Explicazion. ✻

Sea el triang.º rectangulo ABC
el recil.º sobre la Hipotenusa sea
R; y sus semej.s hechos sobre los
otros dos lados x, z: digo q.
estos dos, son yguales al 1.º,

✻ Demostraz.n ✻

Por la (p.r 13) son proporzionales

$\ldots\ldots R \,.\, Z :: \overline{AB}^2 \,.\, \overline{AC}^2$.

y alt.° $\ldots R \,.\, \overline{AB}^2 :: Z \,.\, \overline{AC}^2$.

p.r la misma r.n $\ldots R \,.\, \overline{AB}^2 :: X \,.\, \overline{ABC}^2$

luego (11 del 5.° $Z \,.\, \overline{AC}^2 :: x \,.\, \overline{BC}^2$.

y (12 del m.°) $\ldots Z \,.\, \overline{AC}^2 :: Z+X \,.\, \overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

y (11 del 5.°) $\ldots R \,.\, \overline{AB}^2 :: Z+x \,.\, \overline{AC}^2+\overline{BC}^2$.

ê (?) ymb.do sera $\ldots \overline{AB}^2 \,.\, R :: \overline{AC}^2+\overline{BC}^2 : Z+X$

pero 47 del 1.° $\ldots \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2+\overline{BC}^2$.

luego (14 del 5.°) $R = Z+x$. q.e es &.a

Las propos.s sig.s son las 35, 36, 37 del Libro 3.° que por may.r facilidad se reservaron p.a este Lib.o

Propos.n 35 theore.a

Si dos Cuerdas, se Cortan el rectang.o hecho y de los segm.s de la una; es ygual, al formado de los segm.s de la otra.

Explicazion

Sean las dos Cuerdas AB, RS q.e se Corten en el punto P; digo

q.e el Rect.o de RP en PV es ygual
AP×PB.

Demostraz.n

tiradas las Rectas AR, VB,
los triang.s ARP, BVP tienen los
ang.s verticalm.te op.s en P yguales
el ang.o A = V, y R = B (p.n 21 del 3.o)
luego (p.n 4) seran proporzional.s
.... AP . RP :: PV . PB ......
y (p.n 16) AP×PB = RP×PV q.e es &a.

Prop.n 36 theore.a

Si de un mismo Punto se tira
una tang.te y una Secante al
Circ.o el Rect.o hecho dela Secan
te en su Seg.to ext.or sera yg.l
al Quadrado dela tangente.

Explicazion

Sea la Secante RV y RX la
tangente: digo que $RV \times RH = \overline{RX}^2$

Demost.n

tiradas las Rectas XH, vX los triang.s RXv, RXæ tienen el Angulo R comun y RXæ = v (32 de 3.o) luego el 3.o = al 3.o y seran pp.s
Rv .. RX :: RX .. RH .. luego (p.n 47)
$Rv \times R\ae = \overline{RX}^2$.

Corolario 1.o

Si desde un punto fuera de un Circ.o se tiran dos tangentes, estas seran yguales; por q.e asi el quad.o de la una como el de la otra es yg.l al rect.o hecho de qualq.r sec.te que se tire del mismo punto en su seg.to externo.

Corolario 2.o

Si desde un punto se tiran dos Rectas yg.s a la Circunfer.a siendo la una tang.e tamb.n lo sera la otra.

Prop.n 37 theorema

Si desde punto se tiraren dos Rectas una Secante y la otra q.e toca la Circunferen.a esta sera tangente, si su Quad.o es ygual al Rect.o hecho dela sec.te en su segmento externo.

Explicazion

Sea la Secante RS y la Recta q.e toque la Circunf.a RX: digo que siendo $\overline{RX}^2 = RS \times R\partial e$; sera RX tang.te

Preparazion

Del Punto R tirese ala parte op.ta de X la tang.e RM.

Demostraz.n

$\overline{RM}^2 = RS \times R\partial e$ (p.n 36) pero p.r lo sup.to $RS \times R\partial e = \overline{RX}^2$ Luego $\overline{RX}^2 = \overline{RM}^2$: y siendo RM tangente lo sera tamb.n RX (Col.o 2.o) 16 del 11.

que era lo que se avia de demost.x

FIN DEL LIBRO 6.o

Libro 11.

~~En~~ Los Libros 7, 8, 9, 10 trata ~~Euclides~~ dela Razon y proporcion delos Num.s y de las Cantid.s incommensurables; los quales se omiten Comunmente, por su poca Utilidad. ~~En~~ el 11 y 12 trata delos Solidos que se Reducen á seis especies, y son Prisma, Paralelepipedo, Piramide, Cono, Cilindro, y ~~E~~sphera: delos dos primeros se trabla en este Libro y en el sig.te delos otros quatro.

Los Mathem.os no Consideran al Cuerpo Solido en q.to es impenetrable, ni con otra afeccion Sensible, ó pasion dela Materia Corporea, p.q. que esto es propio dela fisica -

si Solamte, en quanto el Cuerpo ó

Solido es una Magnitud mensura

ble del tercer genero.

Definizn. 5.a

Solido ó Cuerpo es una magnitud

que consta de tres dims. Longd. Latd.

y Profundidad, ó altura: Como el

solido AR cuia longitud es AB, la

Latitud BC y profundd. o altura BL.

Dividese el solido en Regular, e Irre

gular: Solido Regular es aquel que

esta terminado por planos Regula

res, e Iguales entre si, y qualqa.

otro se llama yrregular. Los Cuer

pos Regulares se suelen llamar

tambn. Platonicos, y se reduzen a

cinco especies, tetraedro qe. se com

pone de quatro triangs. equilats. ygs.

obtaedro de ocho triangs. equilats.

ygs. y Icosaedro de veinte triangs. equi

9.º El dodecaedro de doze penta-
gonos regulares iguales, y semejantem.te
el Cubo de seis quadrados iguales.

Definizion 2.a

Los Extremos del solido son
superfizies.

Definiz.n 3.a

Una Linea recta RP se dize
perpend.r a un plano LM si no se
inclina mas a una parte que
a la otra; ó bien si es perpendic.r
á todas las rectas AB, LM que
tiradas en el plano pasen por el pun
to P en que dicha recta toca al plano.
Qualq.a otra recta VP entre la per
pendicular y el plano, se llama in
clinada

Definiz.n 4.

Un plano RP se dize q.e es perpend.r

a otro plano AF; quando las rectas
HR, LS &c.^a perpend.^s a la Comun sec
cion RI son tamb.^n perpend.^s al pla
no AF

Scholio

Si la recta HR siendo perp.^r al
plano AF se mueve sobre el conser
vandose siempre perpendicular con
la RI produzira con su movim.^to
el rectang.^o RE: cuio plano sera per
pend.^r al plano AF y por consequencia
las PI, LS perpend.^s a la Comun-
seccion^to seran tamb.^n al plano AF

Corolario

De la produzcion del plano recto
ó perpendicular se infiere que si
dos rectas HR, PI son perpen.
a un plano AF estaran en un mis
mo plano ó bien que por ellas podra

pasan dn plano RP.

Definizion 5.ª

Si una Recta HL cae ynclinada so
bre el plano AR; vajando del punto
H, perp.r a este plano la Recta HM
y tirando en el plano ML; el angulo
agudo HLM es el que determina la
ynclinazion dela Recta HL en el pla
no AR.

Definizion 6.ª

La Inclinazion de dos planos
PH, AB es el angulo agudo SRL,
que dan forma las perpend.s RS, RL
que desde un mismo punto R dela Comun
Sesion, se Levantan en uno y otro
plano.

Scholio.

Produzese el plano ynclinado por
el movim.to dela Recta PH, que estan
do ynclinada al plano AB se mueve

perpendicularm.te sobre PR.

Definizion 7.a

Planos semejantem.te Inclinados son aquellos, cuios ang.s de Inclinacion son ig.s

Definizion 8.a

Planos paralelos son aquellos q.e por mas que se alarguen acia qualquier parte se conservan siempre equidistantes, y p.r consig.e nunca pueden concurrir; tales son los planos AM, PR

Scholio

La equidist.a entre dos planos paralelos se miden por las perpendiculares DN, MF, q.e de qualq.a punto del uno caen sobre el otro; y asi si dos planos son paralelos, las perpend.s entre ellos seran ig.s; y si las perp.s son ig.s los planos seran paralelos.

Definiz.n 9.a

Solidos Rectilin.os semejantes son los que estan Contenidos de yg.l Numero de planos semejantes.

Definizion 10.

Solidos yg.s y semejantes, son los que estan Contenidos de yg.l num.o de Superf.s yg.s y semej.s

Definizion 11

Angulo Solido Rectilineo es, el que se Compone de mas de dos Angulos planos; con tal que no esten todas las Rectas que los forman en un mismo plano: Como el Angulo Solido P que está formado de los tres ang.s planos APM, NPM, y APN.

Qualquier Angulo Solido puede formarse de muchos ang.s planos pero todos juntos han de valer, menos que quatro Rectos p.r q.e en Ueso.^do^ á Componer 360 grados formaran vna superfizie plana; tambien assi como el Angulo plano es la ynclinazion de dos lineas, assi el Angulo solido es la yncli-nazion de diversos ang.^s^ planos q.^e^ Concurren en vn punto.

Definizion 12.

Angulos solidos yg.^s^ son los que se componen de yg.^l^ num.^o^ de an-gulos planos yguales, cada vno a su Corresp.^e^ y dispuestos con el mismo orden; de modo q.^e^ el ang.^o^ solido P sera ygual R siendo el ang.^o^ MPN ygual SRH MPX = HRL y XPN = SRL.

Definizion 13

Prisma es vn solido Concenido de muchos planos delos quales los dos opuestos son yg.^s^ semej. y paral.^s^

y los restantes son paralelogramos. Si los planos opuestos son triangulos, el Prisma se llama triangular como AR; si quadrilateros, quadrangular, &ª. tomando siempre el Nombre de la figura de los planos opuestos y paralelos. Qualquier destos se llama Base y la perpend.^r que del plano opuesto cae sobre ella es la altura del prisma.

Si la Recta HR ó qualq.^a de sus paral.^s es perpendicular a la base ABR, se llama el prisma rectangulo; y si es obliqua obliquangulo.

Scholio

Si se Conzive el plano ARB se mueve por la Recta RH conservandose sp.^re paralelo a si mis

describira el prisma ARM de cu-
ya produzion se ynfiere que los
planos opuestos son yguales se-
mej.s y parat.s; y los restantes son
paralelogramos. Si el Prisma es
obliquangulo se puede concevir com
puesto de tantos planos yguales
semejantes y paralelos, quantos
pueden passar por la Altura; y
por consig.e la solidez del prisma
sera el prod.o dela base p.r la alt.a

Definizion 14

Paralelepipedo es un solido ter
minado por seis planos de los qua
les cada dos opuestos son parale
los como el solido AR: cuios planos
opuestos AR, CS son paralelos; como
tamb.n AC, y RS y los otros dos CR,
AS.

El Paralelepipedo es una especie

depriema, y se puede conzevir con
p.to de tantos planos yg.s y sem(e)j.
alabase AC, quantos puede expre
san la altura de el; de modo que
asi el paralelepipedo Rect.o como
el Obliquangulo sera el producto
dela Base por la Altura.

Definizion 16.

Cubo es vn paralelepipedo termi
nado p.r seis quadrados ygual.s

Propos.n 1.a theore.a

Vna Recta ABR no puede tener vna
parte AB en vn plano, y otra par
te BR fuera de el.

Es evid.e por q.e siendo Hut
vna Superf.e plana, a q.n p.r todas
partes se puede ajustar vna li
nea recta, si la recta AB se
ajusta en ella, prolong.a se ajustara
tamb.n

por q.e no ajustandose no fuera superfizie plana;

Corolario

De aqui se infiere q.e si dos puntos A y B estan en un plano la recta q.e los une estara con ellos en el mismo plano; p.r q.e desde punto a otro en qualq.r superf.e plana, la recta q.e se tire se ajustara con ella exactamente.

Propos.n 2.a theore.a

Si dos rectas se cortan estaran en un mismo plano; como tamb.n todas las partes de un triangulo.

Explicazion

Sean las dos rectas AR, RB q.e se corten: digo que estaran en un mismo plano, como tamb.n todas las partes del triangulo ARB, p.r q.e si alg.a parte de este, como PRH estuviese en distinto plano; la Recta AR, tendria una parte AP en un plano, y otra PR elevada, ó fuera deel; lo mismo suzederia con la Recta RB: pero esto es ymposible (pr. 1a.) Luego todas las partes del triangº. ARB estan en un mismo plano; y pr. consigte. podra pasar un plano por qualesqª. dos Rectas que se cortan.

Proposn. 3a. theorema

Si dos planos PM. AR se cortan la comun seccion IF es una linea recta.

Demostrazion

Por estan los puntos F y I en el plano AR estara en el mismo plano la recta FI qe. los une (Corº. defn. 1a.) por la misma razon estara esta Recta en el plano PM: Luego siendo

Comun á ambos planos sera la Co
mun seccion, con lo q.e se ve q.e esta
deve ser una linea recta.

Lema

Si desde punto R fuera de un pla
no caen ynclinadas á este, las
rectas RA, RP &a. siendo todas
yg.s entre si sus extr.s A, P, R, &a
estaran en la Circunf.a de un mismo
Circulo AR.

Demostraz.n

Considerese que cae perpendic.r
al plano la recta RC; y tirense
las CA, CP &a. con lo qual se for
maran los triang.s rectang.s ARC, PRC
&a. que teniendo las Hypotenusas AR
RP &a. yguales; y el Lado RC
Comun á todos; con lo qual seran
yg.s entre si los otros lados CA, CP &a
ypp.r consig.e el Circ.o descripto con el

radis CA pasara por todos los puntos A, C, R &ª. que era lo qe. &ª.

✱ Propon. 1.ª Theorema. ✱

Si una Recta es perpendicular á otras dos, que estan en su plano en el punto en que se Cortan; será tambien perpendicular al mismo plano.

✱ Explicazion. ✱

Sea la recta RC perpendicular a las MS, AR en el punto C en que se Cortan: digo que será tambn. perpendicular, al plano HI en que estan. por el punto C tirese en el plano qualquier recta FV; y desde R con qualqr. yntervº. mayor que RC cortense RM, RA RS, RP. &ª. yguales: con lo qual por el Lema estaran los puntos M, A, V, &ª. en la Circunfª. de un mismo Circulo.

✱ Demostrazion. ✱

el triang.º MSO es Isozeles por construzion: luego la recta SC q.e es perpend.r ala Base la dividira en dos partes yguales; por la misma razon sera AC = CR: y siendo (35 del 3.º) AC×CR = MC×CP seran las quatro rectas CA, CP, CR, y CM yg.s entre si: luego el punto C sera (p.n 9 del 3.º) el Centro: y por consig.e CF = CV: con lo qual en el triangulo Isozeles FNV desd.º la recta SC tirase en dos partes yguales, sera perpendicular á ella. Lo mismo se demostrara de qualq.a otra recta, q.e tirada en el plano HO pase por el punto C: luego (Defin.n 3.ª) la recta SC es perpend.r al plano HO.

Corolario.

Todas las rectas yguales, q.e caen desde un mismo punto sôbre un plano tienen con el yguales inclinaz.s

Propos.ⁿ 5.ª theore.ª

Si una Recta RS es perpend.ʳ a otras tres SM, SL, SP: estaran estas en vn mismo plano.

Demostraz.ⁿ

Por contarse las dos Rectas PS, LS estaran (p.ⁿ 2.ª) en el mismo plano, y la RS, sera (p.ⁿ 4) perpend.ʳ á ellas. luego p.ª q.ᵉ sea tamb.ⁿ perp.ʳ á SM es preciso q.ᵉ esta, este en el mismo plano: por q.ᵉ si estuviese mas elevado formaria con ella Angulo agudo; y si mas baja seria Obtuso.

Prop.ⁿ 6.ª theore.ª

Si dos Rectas RS, MP, son perpend.ˢ a vn plano HG; seran paralelas.

Demostraz.ⁿ

Siendo las dos Rectas RS, MP, perpend.ˢ al plano HG podra pasar p.ʳ ellas vn plano, ó estaran en vn mismo plano

y SP sera la comun seccion de los
dos planos; con lo qual siendo (def.n 37)
RS, y MP perpen.s á SP seran para.s 18 de 1.o

Propos.n 7.a theore.a

La recta q.e une dos puntos de dos
paral.s esta con ellas en un mismo
plano (Conversa del Cor.o de la pro.n 5.a)

Propos.n 8.a theore.a

Si de dos paral.s si la una es perp.r á
un plano; tamb.n lo sera la otra ....

Explicazion

Sean las paralelas FA, RL: digo q.e
si RL es perp.r al plano HG: tambien
lo sera FA

Preparaz.n

tirese qualq.a recta AR que estara
en el plano de las paral.s (p.n 7.a) forme
se en el plano HG el triang.o ALP de mo
do q.e sea AP = LR y PL = AR finalm.te
tirese la PR.

Demostrazn.

Los triángs ARL, ALP son (8.a del 5o) totalmte yguales: y siendo el ang.o RLA recto: lo será tambn PAL: Del mismo modo los triangs ARP, RPL son totalmte yguales. Con que siendo el ango RLP recto; lo será tambn su ygual PAR: Luego la recta PA, qe es perpendn alas AL, AR lo será tambn al plano en que estan (prn 4a) y por consige lo será tambn ala AF que esta en su mismo plano: siendo pues la recta FA perpendn ala AL (28 del 5o) y tambn perpendn ala AP será (prn 4) perpendn al plano RQ. qe s

Proposn 9 theorema

Las rectas paralas auna misma son paralas entre si; aunqe esten en diversos planos.

Explicazion

sean las rectas AR, MR paral.s a la PL que se suponen estar en otro plano: de qualq.r punto F de la recta AR vajese sobre PI, la perpend.r FH y en H le-vantese la perpend.r HK hasta encon-trar â MR en el punto K y finalm.te tirese FK.

Demostraz.n

Por ser la recta PH perp.r a las FH, HK sera perpend.r (p. 4) al plano FHK en que estan, y siendo paral.s a PH las AF, MK seran tamb.n perpend.s (p.n 8) al plano FHK luego (p.n 6.a) seran paralelas.

Propos.n 10.a theore.a

Si dos rectas q.e concurren en un punto son paralelas a otras dos que concurran en otro; los angulos comprehend.s seran yguales aunq.e esten en diversos planos.

Explicazion.

Sean las Rectas FH, HK que concurran en el punto H, paral.s á las RL, LN que concurran en el punto L: digo que los Ang.s compreh.s seran yg.s Corte se HF = LR, como tamb.n HK, y LN y tirense FK, RN, FR, HL, KN

Demostracion

Por ser las Rectas FH, RL yg.s y paralelas, lo seran tamb.n las q.e las unen (33 del 1.o) FR HL: por la misma razon son yg.s y paral.s las LH, HK; luego RF y KN son yg.s y (p.n 9) paral.s; con lo qual lo seran tamb.n las q.e las unen FK, RN. y por consig.e los triang.s FHK, RLN, seran (8.a del 1.o) totalm.te yg.s luego el ang.o H = L q.e es lo que &.a

Propos.n 11 Probl.a

Dar una perp.r á un plano de un punto

dado fuera del.

Operazion

tirese en el plano qualq.^r recta HK y del punto dado P; baxese sobre ella la perpendicular PR: en el plano levantese sobre la misma la perpend.^r RM y de P baxese tamb.^n perp.^r a RM la PS; y esta sera la perpend.^r al plano.

Demostrazion

tirada por el punto S en el plano AF la SL paral.^a à HK; siendo HR (p.^n 1.^a) perpend.^r al plano SPR lo sera tamb.^n la misma LS (p.^n 8.^a) y siendo PS perpendicular a las SL, SR que estan en el plano AF sera tamb.^n (p.^n 1.^a) perpend.^r a dho plano.

Proposic.^n 12 Problema.

Dado un punto en un plano levantar sobre el una perpendicular.

Resoluzion

siendo el punto P el que se pide levantar vna perpn. bajese de vn punto qualqa. L fuera del plano, perpendn. a el, la LK, y por P tirese vna paralla. a ella la PH la qual sera pr. la (pn. 8a) perpr. al plano FM.

Proposn. 13 theora.

de vn punto H fuera de vn plano, no se puede bajar mas qe. vna perpr. HP a dho plano; ni del punto P, se puede levantar tampoco mas qe. vna perpn.

Es evide, porqe desde H qualqa. otra recta qe. se tire, como HM; estara ynclinada al plano con que siempre el angulo HMP sera agudo. tambien es claro qe. qualqr. recta NPL qe. no sea la perpendr. PH; estara ynclinada al plano, porqe. siempre el angº. qe. forme con la comun seccn. PR sera maior ó menor que recto.

Propⁿ 14 theorema

Si una recta es perpᵣ a dos planos; estos seran paralelos.

Explicazion.

Sea la recta AS perpᵣ a los planos BX LK: digo que estos son paralelos.

En el plano BX tirese qualqᵃ recta AM por A; y en el plano de las AS, y AM, la MH para a AS: y finalmᵗᵉ en el plano LK tirese la comun sezion HS.

Demostrazion

Por ser AS, MH paralelas; y AS perpendᵣ a los planos BX, LK; lo sera tambⁿ la MH: y por consigᵗᵉ MS es un rectangᵒ y los lados opuestos AS, MH seran yguˢ: y siendo perpˡ a los planos BX, LK seran estos, (defⁿ 8ᵃ paral.)

Proposⁿ 15 theoreᵃ.

Si dos rectas que concurren en un plano son paralᵃˢ a otras dos q.e concurren en uno; los planos en que estan seran paralelos.

Explicazion

Sean las Rectas RL, RH que concurren en el plano HL, paralelas â las FM, FK del plano KM. del punto R bajese sobre el plano KM la perpend.r RB (p.n 11) y por B en el mismo plano tirense BS, BN paralelas â FM, FK.

Demostraz.n

Por ser BS y RL paral.s a FM seran (p.n 9) paral.s entre si: del mismo modo lo seran las BN, RH: y por el (Lema del Libro 1.o) sera BR perp.r a las RL, RH: luego (p.n 4) sera tamb.n perp.r al plano HL; y siendo RB perp.r a los dos planos seran estos (p.n 14) paralelos.

Prop.n 16 theore.a

si un plano corta a otros dos paralelos; las comunes secciones seran tambien paralelas.

Explicaz.n

Corte el plano RS a los otros dos paralelos HL, PX: digo q.e las comunes secciones RA, MS son tambien paral.s

Si no lo fuesen concurririan en algun punto como G; y desiendo estan las rectas SG, AG que son las comunes secc.s prolongadas, en los planos paralelos PX, HL; estos concurririan tamb.n pero esto es contra lo supuesto, luego &a.

Propos.n 17 theore.a

Si dos rectas se cortan por planos paralelos, se cortaran proporcionalmente.

Explicaz.n

Concen los tres planos paralelos HL, PX, y BF a las dos rectas AK, RN: digo q.e las cortara pro porcionalmente: esto es de modo que sera.. AS.. SK :: RM. NM

Demostraz.n

Concev.do un plano q.e pasa p.r las rectas AK, RN se tirara la recta RK y las comunes secc.s RA, NK; con lo qual por la (p.n 16) sera SM paral.a a AR y a KN y (p.r la 2.a del (6.o) seran las pp.s AS.. SK :: RZ.. ZK y RZ.. ZK :: RM.. MN: luego (11 del 5.o) AS: SK :: RM.. MN.

Propos.n 18 theo.a

Si una recta es perpend.r a un pla no; todos los planos q.e pasen por ella, seran tamb.n perpend. a dichos planos.

Explicaz.n

sea la Recta PH perp.ª al plano AF;
digo que qualq.ª plano como PS que
pase por dha Recta sera tambien
perp.ª al plano AF: por que todas
las paralelas que se tiren ala PH
por los puntos dela Comun Seccion
en el plano PS seran (p.n 8.ª) per
perd.s al plano AF, y por consi
g.te lo sera tamb.n el plano PS.

Propos.n 15 theo.ª

Si dos planos que se cortan
son perpend.s a otro; tambien
lo sera su Comun seccion.

Esp.n y Demost.n

Sean los planos PS, RB q.e se
cortan; perpend.s al plano AF: digo
tamb.n sera perp.ª a este plano la co
mun seccion IM porq.e en el punto
I del plano AF no se puede levan
tar (p.n 13) mas q.e una perpend.r

y des.do esta estan asi en el plano PS como en el otro AB es preciso q.e lo sea la Comun Seccion LM.

Propos.n 24 th.eorema

Los seis planos, que terminan un paralelepipedo, son paralelos: de los quales cada dos opuestos son yguales y semejantes.

Explicazion

Sea el Paralelepypedo AH: digo lo 1.o que todos los planos que le terminan son paralelos.

Demostrazion

Porq.e los planos opuestos y paral.s AS, AH, los Corta el plano AI las comunes secciones AL, AR seran paralelas; y del mismo modo por ser los planos paral.s RN, AH los Corta el plano AR: Las comunes secc.s AH, LH seran paralˡᵒ. lo mismo se demuestra de todos los demas Lados: luego los seis planos del paralelepipedo son paralelogramos.

Lo 2.º Cada dos opuestos como AS, MTC sean yg.ˢ y semej.ˢ por q.ᵉ siendo ML ygual AR; y LTC = RS. seran pp.ˢ .. ML .. LTC :: AR .. RS y tamb.ⁿ siendo las rectas ML, LTC paralelas a las AR, RS; los ang.ˢ Comprehen.ˢ seran yg.ˢ (p.ⁿ 10): demostrandose lo mismo de todos los demas Lados y Angulos, en qualesq.ᵃ paralelog.ˢ opuestos seran estos yg.ˢ y semejantes.

Proposic.ⁿ 25 theore.ᵃ

Si un paralelepipedo se Corta por un plano, paralelo a los opuestos. quedara dividido en dos paralelep.ˢ q.ᵉ tendran la razon de sus bases.

Explicazion

Sea el Paralelep.do AZ el qe. este cor-tado por el plano RJC paralelo a los planos opuestos AJC, HZ: digo qe los dos paralelep.s AN, RZ tienen la razon de sus bases AV, RK.

Demostn.

Por estar los paralelep.s entre los planos paralelos AK, MZ ten-dran una misma altura BG; y sien-do el paralelep.o AJC = AV×GB y el par.do RZ = RK×GB sera pr. la 15 de 5.o AV×GB . . RK×GB :: AV . . RK: esto es el para.do AJC al par.do RZ como la base AV a la base RK.

Corolario I.o

Siendo AJC . . RZ :: AV . . RK y AV . . RK :: AR . . RF. (pr. 1.a del 6.o) sera (11 del 5.o) el par.do AJC al par.do RZ como AR á RF y tambn. comp.do

Corolario 2.º

En qualq.r Paralelep.do la seccion paral.a a los planos opuestos, es ygual y semejante á ellos.

Propos.n 28 theore.a

Si un Paralelep.do se corta por un plano diag.l quedara dividido en dos prismas triangul.es yg.s

Explicaz.n

Sea el paral.do AH cortado p.r el plano diag.l HR: digo q.e los solidos AMHESRP, HEFRSP, son dos prismas yguales.

Demostraz.n

Por q.e a los planos paral.s AH, RF los corta el plano HR las comunes secciones HP, SR seran paral.s (p.r 15) por la misma razon seran paral.s las HS, PR; y por consig.e PS sera un paral.mo

comun alos dos prismas; tan
bien dos^dos^ las Dias^s^. HV, PR en dos
partes ygs. alos paral^mos^. MH, AF tan
bⁿ. ygs. y paralelos; se sigue q^e^ los
dos prismas enq^e^ se divide el pa
ralelep^do^. son ygs. y semejs (Def^n^. 10)

Corolario

El Prisma triangular es la
mitad deun Paralelep^do^. Quia base
es un paralelog^o^. duplo del triang^o^.
q^e^ es la base del prisma.

Propos^n^ 29 y 30 theo^a^.

Los paralelep^s^. que tienen unas
mismas ó ygs. bases y alt^s^. son ygs.
Los Paralelep^s^. son el producto
dela base p^r^. la Altura por q^e^. sien
do las bases y alturas yguales, lo
seran tamb^n^. sus prod^s^. q^e^ son
los Paralelepipedos.
Lo mismo se entiende delos pris^as^

Propon.n 32 theore.a

Los paralelep.s que tienen una misma alt.a tienen la razon de sus vases: consta dela (p.n 25) y lo mismo suzede con los prism.s

Corolario 1.o

Los paralelep.s o prismas tienen la razon compuesta de vases y Alturas porq.e qualesq.a dos productos estan en razon compuesta de sus Lados, o rayzes.

Corolario 2.o

Si las vases fuesen yg.s asi en los paralelep.dos como en los prismas tendran unos y otros la razon de las Alturas (seg.n consta dela 15 del 5.o)

Propon.n 33 theorema

Los paralelepipedos semejantes tienen la razon triplicada de sus lados omologos: ô bien son como los

Cubos de dhos Lados.

Explicazion

Sean los Paralep. Semejs. AP, y BO digo qe son como los Cubos de sus lads. homologos AR, BR.

Preparazn.

Por ser los Paralelep. semejantes: Conzibase el Menor BO dentro del maior, de suerte que se ajusten en el Ang.o solido R; y por la seme janza de todos los planos; el Paralelg. BO estara en el plano RP; y BM en el Plano AD: Considerese tam bien que el plano BF se prolonga hasta formar en el paralel.do AP la seccion BG y el plano IO la seccion LN.

Demostrazn.

Por ser los dos paralelep. AP, BO semejs. estaran terminados pr. ygs. numo.

de Paralelos Semejantes, en los quales alternadas las proporz. delos Lados seran pp. AR..BR::RX..RM::RH..RS. ~~

pero la 25 son proporzionales estas mesmas

Par.° P.°		
AP..BP::AR..BR.	}	
BP..BK::RX..RM	}	Cor.° dela 25.
BK..BO::RH..RS	}	

Luego los Paralepipedos Semejantes

AP..BP::(BP..BK::BK..BO)

AP..BO::AR..BR^x

esto es los 4 Paralelep. AP, BP, BK, BO

Continuos proporzionales: y teniendo el 1.° al Ult.°, la razon triplicada del 1.° al 2.° siendo la razon de AP..BP::AR..BR; sera el Para.° AP..Par.° BO:: $\overline{AR}^3..\overline{BR}^3$ x esto es como los Cubos delos Lados Homologos.

Corolarios

Siendo en los Parale.dos Semej.s las al ternas pp.s alos Lados Homologos.

serán los Paralelep.s como los Cubos de las Alturas.

Corolario 2.º

Los Prismas Semej.s tienen la razon trip.da de sus Alturas; y tambien son como los Cubos de ellas, y de qualesq.a Lados Homologos.

Corolario 3.º

Si a los Lados homolog.s AR, RB se hallan dos Continuas pp.s tr, y q será el paral.do AP. P.º BO :: AR. qq

Prop.n 35 theore.a

Los Parale.dos, q.e tienen vases y alt.s reciprocas: y al Contrario.

Consta del Lema del Lib.º 5.º) por ser los Para.s el prod.º de las vases por las Alturas.

Propos.n 36 theore.a

Si tres rectas son Continuas pp.s el par.do hecho de las tres es ygual al Sem, hechos dela Altedia.

✳ Explic.^{n} ✳

Sean Cont.^{s} pp.^{s} las tres rectas CX, DZ, FH y esté formado el par.^{do} PJ demos do q.^{e} sea PR = CX; RJC = DZ, RK = FH: tamb.^{n} el Par.^{do} AM este form.^{do} dela Altedia DZ.

✳ Demost.^{n} ✳

Por ser pp.. PR.. AB :: AB.. RJC sea el Quad.^{o} AB = al rect.^{o} PK y sien do las Alt.^{s} RN, BS tambien ygua.^{s} seran ygs.^{s} los Paralelepipedos.

Si fueren obliquang.^{s} des.^{do} sex. s pre semej.^{s} se ajustaran sus ang.^{s} solidos y las Alt.^{s} siempre seran ygs.^{s}

✳ Prop.^{n} 37 theore.^{a} ✳

Si 4 rectas son pp.^{les} los para lelepi.^{dos} seme.^{s} form.^{dos} sobre ellas lo se ran tamb.^{n} y al Cont.^{o} si estos lo son los Senarios las Rectas.

Es Evidente pr. q.e siendo las Rectas ppp.s Senarios los Cubos; y los Paras. son como los Cubos de las Rectas.

Fin del Libro II.

+

Libro 12.

De las Prinzipales Prop.^{des} de los Quatro Solidos. Piramide. Cono. Cilindro, y Esphera.

Definiziones.

1.ª

Piramide es un solido terminado por varios triang.^s que tienen sus vases en un mismo Plano; y apuntandose sus lados Concurren todos en un mism.º punto. Como el solido AR term.^{do} p.^r los triang.^s AMR, RAB, BRN, y RNM que Concurren en el Punto R y tienen por vases los Lados del Quadril.º AN: Este Plano se llama vase de la Piramide, y puede ser triangular, Quadrilatero &.ª siendo

la q.e determina la Sup.e dela Piram.e
De modo q.e si la Base es un triang.o
la Piramide se llama triangular,
si es un Quadril.o Quadrangular &a.
~~El~~ Punto en q.e Concurren todos-
los triang.s se llama Vertize; y la Al
tura dela Piramide es la perp.a q.e de el
Cae sobre la Base prolongada si fue
re nezesario. Obs.n se sigue que si
dos Piramides tienen el Vertize Co
mun, y sus Bases en un mismo pla
no tendran una misma altura, y lo
mismo suzede si las Piramides estan
entre planos Paralelos. tambien se
infiere delo dho q.e los triang.s q.e termi
nan la Piram.e son tantos quantos son
los lados de su Base.

Definizion 2.a

Si una Recta Indetermin.da RA teni.do fi
xo su extremo R se mueve alrededor de

la Circunfª dedh Circulo ANV produzi
ra con su movimiento vna superficie que
se llama Conica; y el solido terminado
por ella se dize Cono: el Punto fixo R
se llama Vertize; las rectas RA, RV Lad.
y el Circulo ANV vase del Cono. La rec
ta RC que se tira del vertize al centro
del circº ô dela vase, se llama exe del Co
no y si es perpendª â dha Vase, el Cono
es recto como ANVR y si obliqua es calº
como HKM. La perpendª que del Vertize
cae sobre la vase es la Altura del Cono
y esta es el mismo exe en el recto. ~~Este~~
puede concevirse tambien formado por el
Movimiento dedh triangº rectangº ARC al
rededor dedho de sus lados RC que estu-
viere fixo mientras la Hipotenusa RA, y el
otro lado CA dieren vna buelta entera.

Scholio.

Si del Centro C del circº ANV sale ele

rada la CR si dho Circulo se moviese pa
ralelamente por ella; de Modo, que su
Radio fuese sspre proporc.l ala Altura,
hasta que lleg.do a R quedaria el Circ.o
Reducido adn punto que produziria
el Cono ARS que seria Recto siendo RC
perpend.r ala Base, y ssoal.o si fuese
ynclinada: De esta produzion del Cono
se sigue que qualq.a Seccion DLF paral.a
ala Base, es Circulo; y que los Radios CA
DE son pp.s alas Rectas RC RD y final
mente q.e el Cono es vn agregado de
Circulos paralelos quantos pueden
pasar por la Alt.a CR, cuios Radios
se van disminuy.do en Razon delas Alt.as
hasta desvanezerse en el Punto R.

Definizion 3.a

Si p.r las Circunferen.s de dos Circulos s yg.s
y Paralelos se moviese vna Recta HA dan
do vna Vuelta entera produziria con su mo to

una superf.e que se llama Cilindrica, y el solido term.do por ella y los dos Circ.s se dize Cilindro: La Recta HA se dize lado del Cilindro y la SC que une los centros de los Circulos Exe que si es perpend.r á dhos Circulos sera el Cilindro Recto como ABRH; y si fuese ynclinada Obcal.o como MF. Qualq.a de los dos Circulos se llama Base; La perpend.r entre ellos es la Altura.

Scholio

Si un Circulo AB se moviese siempre parallelo á sy mismo por la Recta CS que sale elevada de su Centro produciria con su movim.to el Cilindro AR y si la Recta SC es perp.r ala base AB el Cil.dro sera Recto; y si ynclinada Obcaleno. De esta produc.n se ynfiere que los dos planos opuestos son dos Circulos ygu.s y q.e qualq.a sexcion PI paral.a ala base sera un Circ.º ygual á ella.

Definizion 1.ª

Esphera es un Solido AMBE termi-
nado por una Superfizie Curba, dis-
tante ygualmente por todas partes,
de un punto dentro de ella C, que se
llama Centro; y del qual todas las
Rectas q.e salen y se terminan en
dha Superf.e Curva como CA, CM &.a
son yg.s y se llaman Radios. todas
las Rectas AB, EM que pasan p.r el
Centro y se terminan en la Superf.e
dela Esphera se llaman Diametros
de ella, y son yg.s p.s Componense cada
una de dos Radios. Puede Conzevirse
la Esfera formada p.r un Semic.º
AMB conzid.º que este ten.do fixo su
diam.º AB da una buelta entera al re-
dedor de el y en este caso se ve q.e qualq.a
Sezcion que pase por el Centro sera un

Circ.° yg.l al Circulo AMB.

Definizion 5.ª

Conos y Cilindros semejs. son aque llos que tienen los Exes pp.s alos Diametros delas Vases; y los Angs que forman dhos Exes con ellos son ygs.: asi son los Conos ABR, MNH son pp.s AB..MN:: CR..SH y los angulos RCA, HSM son yguales; dhos Conos seran semejantes: Lo mismo se entiende delos Cilindros PV, KH.

Definiz.n 6.ª

Una magn.d se dize que dexa̅ra en otra; quando la difer.a en ellas es menor que qualq.a Cant.d asignable: Por esto un Circulo se puede tomar por un Poligono Regular de Lados infinitam.te pequeños, respecto de que la dife rencia entre el Circ.° y dho Poligono sera menor q.e qualq.a Cant.d asignable.

tamb.n Consideranđo al Circ.o como
vn poligono de Lados ynfinitam.te pequeños
sera el Cono vna piramide ynfinitaqu.ra
y vn Prisma ynfinitangulo, vn Cilindro;
de modo que ~~en~~ todas las propiedades
que tienen las Piram.s y Prismas, las ten
dran los Conos y Cilindros.

Propos.n V.a theore.a

Los Polig.s semejantes ynscriptos
en los Circ.s tienen la razon duplicada
de sus Diametros, ó radios: ó bien son
como los Quadrados de ellos.

Explicaz.n

Sean ZK, FH, los Polig.s semejantes
ynscriptos en los Circ.s tirense á quales
q.a lados homologos los radios CA, CB;
LM, LN; tirense tamb.n AK, MH.

Demostraz.n

Por ser los triang.s ABK, MNH, semej.s,
(20 del 6.o) sera el angulo X = V–

y por Consig.^e G = t por ser duplos de
R y V (p.^n 2. del 3.°) y siendo Iozeter
los triang.^s ACB, LMN seran Equiang.^s
(32 del 1.°). (y 4 del 6.°) seran proporz.^s
AB..MX :: CB..LN: esto es los Radios
estaran en la misma razon q.^e los La
dos homog.^s pero los Polig.^s son como
los Quad.^s delos Lados homo.^s luego se
ran como los Quadrados delos Radios.

Corolario.

Siendo los Polig.^s ZK, FX semej.^s
seran alternas las Proporziones
AB..MX :: BK..XX :: KS..XP &.^a
y por (la 12 del 5.°) AB + BK + KS &.^a
.. MX + XX + XP &.^a :: AB..MX.
ô bien como CB..LN. esto es los Pe
rimetros delos Polig.^s principas y semej.^s
como los Radios: y Considerandose las
Circ.^s como polig.^s de infin.^s Lados, seran
tamb.^n sus Circunferen.^s como los Radios

Corolario 2.º

Conciviendose los Circ.^s como Poligonos de Infinitos lados y siendo estos como los Quad.^s delos radios enlos Circulos Inscriptos; seran tamb.^n los Circ.^s como los Quad.^s de sus radios, conciviendo q.^e son representados p.^r los Polig.^s de infinitos lados en que degeneraran (esta es la prop.^n 2.^a)

Las prop.^s 3.^a y 4.^a son mui pro lixas y como solo sirven p.^a demostrar la 5.^a se dara el Lema siguiente en su Lugar.

Lema.

En qualq.^a Piramide la Seccion paral.^a ala Base; es semej.^te a ella.

Explicaz.^n

Sea AVL una piram.^de Quadrangular que este cortada p.^r el Plano KK paral.^a ala base AV: digo q.^e la Seccion que forma es semeje. a dicha Vase

Demostrazn.

Por estar Cortados los Planos pa ralelos AS. MK por el plano HLA seran (16 del 11) las Comunes Secciones HA, MH paral.s por la misma lo seran AR, HF y por la (10 del 11) los ang.s de AR, MHF seran yg.s tambn. por razon de las paral.s seran propd. altern.s las pp.es HA..MN::AL..NL y

AR..NF::AL..NL

Luego 11 del 5.o HA..MH::AR..NF y al ternando..HA..AR::MN..NF: lo mis mo se demostrara de todos los demas lados y ang.s: luego el Quadn. HK es semejante al Quadrilatero AS. esto es la secn. paral.a ala Vase es semejte. a ella.

Propdn. 5.a theorema

Las Piramides de igual Altura tie

nen la razon de sus bases.

Explicazion

Sean las dos Piramid.s triang.s de ygual altura ABLP, LMNR: digo q.e tendran la razon de sus bases ABL, LMR.

Demostraz.n

Considerese q.e las bases estan en un mismo plano AM y q.e otro plano OF paral.o a este corta dhas piramides: Considerese tamb.n por los puntos P y R el plano PR paralelo a los otros dos; y por que los triang.s ABL, OEZ, son semej.s (por el Lema) seran (19 del 6°) como $BL^2 .. EZ^2$, y siendo EZ y BL parale.s seran proporziona.s

$BL .. EZ :: LP .. ZP$ y tamb.n sus quadrados $BL^2 .. EZ^2 :: LP^2 .. ZP^2$; luego (11 del 5°) $ABL .. OEZ :: LP^2 .. ZP^2$: del mismo modo se demuestra q.e son pp.s

LMX..KFH::$\overline{LR}^2$..$\overline{KR}^2$ pero (17 del 11) son yg. LZ..ZP::LK..KR y com

pon.do y Quadr.o...$\overline{LP}^2$..$\overline{ZP}^2$::$\overline{IR}^2$..$\overline{KR}^2$ y todo

ABL..OEZ::IMN..KFH y alternando

ABL..IMN::OEZ..KFH. Lo mismo se

demostrara de todas las secc.s que se

form en ~~en~~ estas dos Piramides que

seran de yg. Num.o en una q.e en otra

por tener ygual altura: luego (p.n 12

de 5.o) todos los triang.s que se con

sideran componer la Piram.e ABIP,

a todos lo q.e comp.n las Pir.s LMXR

como la base ABL a la base LMX

que es lo que se avia de demostrar.

Corolario

Siendo las Pir.s de yg.l alt.a como

sus bases; si las bases y alturas

son yg.s las Piram.s lo seran tamb.n

Propos.n 6.a theore.a

Las Piram.s de yg.l alt.a son nada

tienen la razon de sus Vases (se yn fiere dela Propos.n antezed.te)

Propos.n 7 Theor.a

Qualesq.a Piram.e es la terzera parte de vn Prisma de yqual va se y altura.

Explic.n

Sea el Prisma triangular AH: con sidarse que por los Puntos ADC para vn Plano, como tamb.n p.a separar la Piram.e ABCD: Conzavase vno pla no por los tres puntos RDC el qual separara las dos Piram.s triang.s RDCA, RHCD: con lo qual queda ra divid.o el prisma en tres pirmades triang.s que dig.o seran yguales entre si.

Demost.n

Las dos piram.s RDCA, RDHC tienen el Vert.e comun en D, y sus vases

RCA, RCH yguales y en su mismo plano; luego sus alturas seran tambien yguales; y por consiq.e por el (Cor.o dela p.n 5.a) lo seran del mismo modo las Piramides. Las dos Piram.s ABCD RDHC tienen las bases ABC, RDH yg.s y estan entre planos Paralelos: luego tendran una misma Alt.a y por consiq.e seran tambien yg.s con lo q.l las tres Piram.s en q.e se divide el prisma seran yguales entre si; luego qualq.a de ellas sera la tercera parte de dicho Prisma.

Corolario.

Siendo la Solidez del Prisma el prod.o dela base por la Altura, sera la dela Piramide el prod.o dela base por la tercera parte de su altura.

Scholio

todo lo que se ha dho en el Libro 11

dela Igualdad y Proporz.^n delos Prismas se deve entender tamb.^n delas Piram.^s por ser sus terz.^s partes: y siendo el Cono Piram.^de Infinitangula, y el Cilindro Prisma Infinitang.^o se devera entender lo mismo delos unos que de los otros: de suerte que las pro pp.^s sig.^s son Const.^s delo ya dho.

Propoz.^n 8.^a theore.^a

Las Piram.^s semejantes tienen la razon triplicada de sus lados homologos.

Es evidente porq.^e las Piram.^s semejantes son el terzio de prismas semej.^s y teniendo estos la razon triplicada de sus lados Homologos (33 del 11) tamb.^n la tendran las Piram.^s semejantes: asi mismo estas Piram.^s tendran las altu ras pp.^s alos Lados y por Consig.^e seran tambien como los Cubos de sus altur.^s

Prop.^n 9 theore.^a

Las Piram.^s Ig.^s tienen bases y altu
ras reciprocas; y al contrario si las
bases y alturas son reciprocas, las
Piram.^s seran yguales. (Consta dela
prop.^n 31 del 11) tambien tienen la
razon Comp.^ta de bases y alturas,
(Como Consta dela 32 del 11)

Propos.^n 10 theorema

Qualq.^r Cono es la tercera parte
deun Cilindro de Ig.^l base y Altura.
Consta dela def.^n 6.^a y 7)

Propos.^n 11. theore.^a

Los Conos de Igual Altura tienen
la razon de sus bases: y lo mismo los
Cilindros, Consta dela 32 del 11 y de
la 6.^a dd te)

Propos.^n 12 theore.^a

Los Conos y Cilindros semejant.^s
tienen la razon triplicada delos diam.^s
de sus bases consta def.^n 6.^a y dela p.^n 33 del
11)

Prop.n 13 theore.a

Si un Cilindro se Corta por un plano paral.o a las Vases; los segmentos solidos, seran como los segmentos del Exe.

Explicazion y de.n

Sea el Cilindro Recto AE, y el Esc.o AF Cortados p.r un plano RO paral.o a las Vases. y en el Recto los segm.s sol.s AO y RE q.e se consideran como Prismas ynfinitangulos ten.do yg.s Vases, seran como sus alturas q.e son los seg.s del Exe HP y PM (32 del 11) En el Escal.o AF seran p.r la misma razon los segm.s solid.s AO y LF como sus alturas HP y PM: pero HP.. PM :: HE .. RK (17 del 11) Luego los seg.s solidos AO y LF son como los segm.s del Exe HE, y RK.

Prop.n 14 theorema

Los Cilindros de yg.s Vases son como las altura se acava de demostrar.

Propon. 17. theorema

Los Cilindros que tienen vases y altu[ras] reciprocas: y si las vases y alt.s seran reciprocas los Cilindr.s seran yg.s (consta delo dho por Considerarse como Prismas

Propon. 18 theorema

Las Espheras tienen la razon tripli cada de sus diametros ó radios: o bien son como los Cubos de ellas.

Explicn. y demostn.

Sean las Espheras X y L: concibanse compuestas de una Infinidad de piramides cuios Vertizes esten en los Centros; y las vases (aunque planas) vengan a formar por ser infinitam.te pequeñas la superf.e dela Esphera; y considerese tambien que dhas piram.s son en cada esphera yg.s entre si; y entras dos en yg.l num.o y siendo en este Caso, la misma razon tendra

ra delas Piramides HXS dela Es-
phera X, à otra RLM dela Esphe-
ra L: pero la Piramide HXS es ala
Piramide su semejante RLM como
$\overline{XS}^3$ à $\overline{LM}^3$ (P.r 8.a) Luego la Esphe-
ra X es ala Esphera L como $\overline{XS}^3$,
à $\overline{LM}^3$: esto es como los Cubos de
los Radios: Lo mismo se entiende
delos Diametros, por ser duplos de
los Radios.

Fin delos Elementos.

Apendize delas Secciones Conicas.~~

En los Elementos de Eu
clides se ha tratado delas
Lineas Rectas, y delos Circulos, cuia
Geometria suele llamarse ynferior;
y superior la que contempla y averigua
las propiedades delas Lineas Cur
vas, entre estas son las principales
la Parabola; La Elipse; y La Hi
perbole; y se llaman Secc.s Conicas;
por que resultan delas Secciones,
que se consideran formadas en el
Cono.

Dela Parab.a

Definiziones.

Si a un Cono AMTER le corta p.r el

Exe un plano perp.^{r} ala Base; la Seccion sera un triangulo ARH que se llama triang.^{o} por el Exe, y la comun secc.^{n} deste con la base es el diametro AH.

definizion 2.^{a}

Si al Cono le Corta un plano PMK de modo que siendo perpend.^{r} al triang.^{o} por el Exe sea su Comun Seccion PS paralela al Lado RH formara una Curva en el Cono KPM que se llama parabola; y la PS se dize Exe dela Parabola la MK base della, y el punto P se llama Vertise, qualq.^{a} paral.^{a} LF dentro dela parab.^{a} se dize diametro. La Base MK es perpend.^{r} al Exe PS y al diametro AH dela Base del Cono porque siendo el Plano dela Parabola y el del Circ.^{o} AMHC perpendiculares al tri.^{o} por el Exe ARH, lo sera tamb (19 del 11) su Comun seccion MDC, y esta por con sig.e (def.n 3.a del 11) perpend.r a las SD, AX que estan en dicho triangulo.

Definizion 3.a

Si se considera que al Cono le Corta un plano paralelo a la base como LKOX su Comun seccion con la parabola sera la recta KX que se demuestra ser perpend.r a las PS, LO del mismo modo que se ha demostrado q.e la MDC es perp.r a las SD, AX. con que todas las Comunes secciones delos Circ.s paralelos a la base del Cono con el plano dela parab.a seran perpend.s al Exe della, y por con siguiente paralelas entre si. Estas comunes secc.s KX. MDC &c.a se llaman ordenadas y las KF, MD que son sus mi tades (p.n 3.a del 3.o) se llaman semiorde nadas; las partes PF, PD del Exe que cortan las ordenadas se llaman abscisas.

Quando se habla de Ordenadas general-
mente se entiende que lo son respecto
al Exe, bien que qualquier diametro
puede tener tambn. tener sus Ordena-
das, ó aplicadas, q son todas las Rec-
tas paralelas entre si aquienes di-
vida en dos partes iguales

Definizion 1.a

Si se corta RZ = FO = SH si se tiran
por Z la ZB paral.a á HA; dha ZB se lla-
ma parametro del Exe; y aunque
este es el principal, puede qualquier
diametro tener su parametro como
se vera en su Lugar.

Las demas defin.s se yran dan-
do amedida que se vaya Ofreciendo

Propos.n 1.a theore.a

En la Parabola el Quad.o dela Semi
ordenada es ygl. al Rectang.o hecho
del parametro en la abcisa, esto es

$\overline{KF}^2 = PF \times BZ$.

Demostrazion

Los triang.s LFP, BZR son semej.s por razon de las Paralelas, y por consiguiente pp. $LF..FP :: BZ..ZR$ pero $ZR = FO$ p.r Constru.n luego $LF..FP :: BZ..FO$ y (16 del 6°) $LF \times FO = FP \times BZ$ pero por la (13 del 6°) $\overline{KF}^2 = LF \times FO$ luego $\overline{KF}^2 = PF \times BZ$ que es Dd.a

Corolario 1°.

Desta propiedad se infiere que el parametro es una tercera proporcional a la Absisa y la semiordenada y por consiguiente que es constante en qualquier parabola.

Corolario 2°.

tambien se infiere de esta propiedad (que es la primaria, ô principal de la Parabola) que los Quadrados de las semiordenadas KF, MS son como las

abscisas FP, SP: porque se tiene
$\overline{KF}^2 = BZ \times PF$. $\overline{MS}^2 = BZ \times PS$ pe
ro $BZ \times PF : BZ \times PS = PF : PS$
Luego $\overline{KF}^2 : \overline{MS}^2 :: PF : PS$.

Corolario 3.º

Puede describirse la Parabola sin
nezesitar de considerarla en el Cono
tirando dos rectas HP, LD que
se corten en angulos rectos, y eli
giendo por Parametro (supto. q. es
constante) qualquier recta AP; con
lo qual determinadas en el Exe AX a dis
creción las Abscisas A1, A2, A3, &c.
y haz.do AR = A1. AS = A2. AH = A3. &c.
se describirá el semicirculo sobre RP
SP, HP &c. esto determinará en el
Exe prolongado las AM, AK, AL &c.
que son medios proporzion.s (p. 13 del 6.º)
entre el Parametro AP y las Abscisas
A1, A2, A3, &c. y asi tirando-

por los puntos del ~~Exe~~ 1, 2, 3, &c.ª paral.s a la HP y contando 1M = AN 2m = AK, 3M = AL &c.ª se tendran los puntos m, n, l, por los quales pasando una Curva sera Parabola p.r que $\overline{mr}^2 = A1 \times AP$; $\overline{n2}^2 = A2 \times AP$ &c.

Definizion 5.ª

Focus esta parab.ª es un punto en el exe, que dista del Ventize la quarta parte del Parametro.

Propos.n 2.ª Problema

Hallar el Valor dela Recta FH tirada, desde el focus a qualquier punto dela Parabola.

Resoluzion.

Parece desde H la semiordenada HR y sea... el Par.tro ... = p

FR .... = x

sera AF .... = $\frac{p}{4}$

y AR .... = $x + \frac{p}{4}$

Con lo qual (p.^{n} 5.^{a}) se tendrá ......

...... $\overline{HR}^2 = p \times \overline{x + \frac{p}{4}} = px + \frac{pp}{4}$

tambien es ...... $\overline{FR}^2 = xx$

Luego ...... $\overline{FH}^2 = \overline{HR}^2 + \overline{FR}^2 = xx + px + \frac{pp}{4}$

y sacada la raiz será ..... $FH = x + \frac{p}{2}$ ...

ygual RF mas la mitad del parametro.

ó bien ygual ala Abscisa RA mas la quarta parte de dho parametro.

Si la recta que sale del focus fuese perpendicular al exe, como FS, será (p.^{n} 5.^{a}) $\overline{SF}^2 = p \times \frac{p}{4} = \frac{pp}{4}$ y por consiguiente $SF = \frac{p}{2}$ esto es la semi ordenada en el focus ygual ala mitad del parametro.

Si la recta fuese sobre el focus como FL bajada la semi ordenada LO sea $FO = x$: será $AF = \frac{p}{4}$, (y p.^{n} 1.^{a}) $\overline{LO}^2 = \frac{pp}{4} - px$ y añadiendo $\overline{OF}^2 = xx$ se tendrá $\overline{LF}^2 = \overline{OF}^2 = xx - px + \frac{p}{4}$ y sacando la raiz será $LF = \begin{cases} x - \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} - x \end{cases}$

pero ..... $\frac{p}{2} 7 x$: Luego la Raiz positiva será ... $\frac{p}{2} - x$ esto es la mitad del param.° — fO obien MO que es la abscisa, mas la quarta parte del Parametro.

Corolario =.°

Con esta propiedad puede la Parabola descrivirse deste modo: tirense dos Rectas que se corten en angulo Recto en M, y desde M tomense dos partes yguales MA y AF, que cada una sera la quarta parte del parametro; tirense perp.s a MO las CZ, RV, LK &a. y tom.do desde el foco F la dist.a BM se cortaran los puntos C, y Z tom.do FM se haran yguales á ella FR y RV: tamb.n desde el foco siempre tom.do la dist.a HM se cortaran los Puntos L y K, y pasando una Curba p.r todos los puntos determi y por el Vertize A, se tendrá la Parabola: el punto M suele llamarse generador.

Corolario 2.°

Puede tamb.n describirse la Parab.a por un movim.to continuo del modo siguiente. Pongase una Regla KV perpend.r al Exe que pase por el Vertize, y siendo N el punto generatriz tomese un Hilo igual a RO y fixando un extremo en el foco F, y otro en el Punto H de la Esquadra HRV que corra perpend.r y libremte. p.r la Regla KV, se tomará un Lapiz, o punta de Compas, con la qual siguiendo con la Esquadra, que se mueva sobre la Regla KV y llevando el Hilo siempre tirante; describirá la Parabola SMR; fundado en que siendo todo el Hilo HMF

y qual OH será spre la parte FH
y qual HZ.

Definizion 6.ª

tangente ala Parabola, es la recta q.e tocandola en un punto, alargada no la corta.

revoluzion

Propos.n 3.ª Probl.ª

Dado un punto P en la parabola tirar a el una tangente.

revoluzion.

Siendo V el punto generador, y K.s perpendicular al Exe tirense la Semiordenada PL, la PH perpendicular á KV, y las focales PF, HF: dividase esta por medio en M tirando p.r los puntos M y P la recta TO esta sera la tangente: y por consig.te qualq.r punto della como O, caera fuera dela Parabola

tirense OE y OK perpendi, a TE y SK
y finalm.te las OF, y OE.

Demostraz.n

Siendo EL un rectangulo sera PE
ygual LS, pero LS = OF (p.n 2.a)
luego FP = PE, en el triang.o Isos
EPF la recta PM que divide la ba
se en dos partes yguales, sera
perpendicular á ella, y por consi
guiente seran totalm.te yg.s los -
triang.s OME, ONF y el lado -
OF = OE pero OE > OK y OK = NS lue
go OF > NS. y por consig.e el punto
O cae fuera dela Parabola. Lo
mismo se demostrara de quales
quiera otro, que no sea el punto P;
luego la PT es tangente.

Definizion 7.a

Si del punto P del contacto se levan
ta PE perpendicular ala tangente

se llama Normal y la NL subnormal y la LT subtangente.

Corolario 1.º

Siendo las HF, PN perpend.res TP será HN un paralelogramo y por consig.te PH = NF pero PH = LS luego LS igual NF y quit.das la parte comun NF quedara la subnormal NL = ala mitad del parametro FV.

Corolario 2.º

En el triang.º rectang.º tPN, siendo PL perpend.r ala base será media proporz.l entre los segmentos de ella NL, y LT, con q.e seran pp.s (suponiendo que el param.º es P) y la abscisa LR = x ... LN . LP :: LP . LT —

$\frac{P}{2} \ldots \sqrt{px} :: \sqrt{px} \ldots LT = 2x$ esto es la subtang.e LT dupla dela abscisa.

Corolario 3.º

Queriendo tirar una tangente al punto P se vajara la semiordenada PL y tomando Rt = RL, si se tira TP sera tangente.

Corolario A

Si se tira la AP parala. al exe que sera la HP prolongada sera el ang.° QPA = MPF por ser ambos ygual.s al angulo HPM. Esta es la razon por que en un Espejo parabolico todos los rayos de luz concurren en el foco, donde segun la magnitud del espejo se enciende qual.q.r materia combustible, se derriten los metal.s &a. fundado todo en lo dicho y en un principio de Catoptrica, que dize hablando de los rayos reflexos, el angulo de yncidencia es yg.l al de reflexion: esto es QPA = MPF, ZXV = PXF. &a.

Propos.ⁿ 4 theore.ª

Sien la Parabola RPM se tira MS paral.ª a la tang.ᵉ TP y por el punto del Contacto la PK paral.ª al Exe esta dividira a la MK por medio en H

Preparazion

Prolongese la KP y por los puntos R, K, P, H, y M tirense perpendiculares al Exe.

Demostraz.ⁿ

Por razon de las Paralelas los tri Angulos TPL SKF son semej.ˢ luego (19 del 6º) Δ TPL . Δ SKF :: $\overline{PL}^2$. $\overline{KF}^2$. y siendo tamb.ⁿ ... $\overline{PL}^2$. $\overline{KF}^2$ :: LR . RF. y (1ª del 6º) ... LR . RF :: LRBP . FRBO. Luego (11 del 5º) .. Δ TPL .. Δ SKF :: LRBP . FRBO. pero Δ TPL = .. LRBP.............

Luego Δ SKF = FRBO ....

Asimismo (19. 6º) Δ TPL .. Δ SMA :: $\overline{PL}^2$ .. $\overline{MA}^2$ .....

y $\overline{PL}^2$ .. $\overline{MA}^2$ :: RL .. RA ~~~~~~~

y (1.ª del 6.º) .. RL .. RA :: LRBP .. ARBN

Luego (11 del 5.º) Δ TPL .. Δ SMA :: LRBP .. ARBN

pero Δ TPL = LRBP

Luego Δ SMA = ARBN

Siendo Δ SMA = ARBN

y quitando ... SKF = FRBO

quedara .. MKFA = FAXO

Quit.do tamb.n el rectang.o } XHKFA

quedara el Δ MHX = OHK y siendo semej.s seran totalm.te yguales y p.r consiguiente ..... MH = HK ....

Corolario 1.º

Siendo la recta PX paral.a al exe sera diametro q dividiendo a la MK p.r medio en H, esta q.e es paral.a a la tangente sera su aplicada.

Corolario 2.º

El quadrado de la tangente PT, es al quadr.o de la semiord.a KH del dia menos como la abscisa RL del exe ala abscisa PH del diametro ... por que el triang.o ... $tPL = LRBP$ y totalmente y q.s los triang.s $TPL = SHZ$.

Sera ... $SHZ = LRBP$ ... siendo tambien ... $SMA = ARBK$ si se quitan los y q.s ... $SHZ = LRBP$ ......

Quedara ... $AZHM = ALPK$ ....

y quitan.o el comun ... $AZHK$

se tendra el rect.o $ZLPH = \Delta KHM =$

$=$ al triangulo .. OHK ....

Pero el $\Delta\, TPL \,.\, OHK :: \overline{PT}^2 \,.\, \overline{HK}^2$ (19. 6°)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Luego pon.o los rectang.s}\\ \text{y iguales ala triang.s}\\ \text{se tendra ...}\end{array}\right\} LRBP : ZLPH :: \overline{PT}^2 : \overline{HK}^2$$

y siendo tambien ... $LRBP : ZLPH :: RL \,..\, LZ = PH$

Sera .... $\overline{PT}^2 \,.\, \overline{HK}^2 :: RL \,..\, PH$ ....

Corolario 3.o

siendo ...... $\overline{TP}^2 \,.\, RL = \begin{cases} \overline{HK}^2 : PH \\ \overline{CX}^2 : PC \end{cases}$

Sera ... $\overline{HK}^2 \,..\, PH :: \overline{CX}^2 \,..\, PC$.

y altern.^{te} .. $\overline{HK}^2 : \overline{CX}^2 :: PH . PC$.

esto es los Quad.^{s} delas Semiordenadas

en el Diametro como tamb.^{n} las Abssisas

pero (E 19. 6) $\Delta\, tPL .. \circ HK :: \overline{Pt}^2 . \overline{HK}^2$

luego poniendo los Rectang.^{s} y q.^{s} alos

Quad.^{s}

Corolario 1.°

Si a qualq.^{r} Abscisa PH del Exe PN

y su Corresp.^{te} Semiordenada HK se

busca una tercera pp.^{l} esta sera el

parametro del Exe y tamb.^{n} sera

tercera proporz.^{l} a qualq.^{r} otra absi

sa y su Correspondiente aplicada,

por que siendo (Cor.^{o} 3.°) $\overline{HK} . \overline{CX} :: PH : PC$

y siendo tamb.^{n} (A 15 del 5.°) (Supon.^{do}

que P sea el parametro del diam.^{o})

sera ..... $PH . PC :: PH \times p : PC \times p$ ~~

sera (E 11 del 5.°) $\overline{HK}^2 . \overline{CX}^2 :: PH \times p . PC \times p$.

pero siendo $PH . HK :: HK . P$. p.^{r} sup.^{n}

se tiene .... $\overline{HK} = PH \times p$

Luego $\overline{CX}^2 = SC \times p$ (14 del 5.º)

y por Consig.ª ... $SC..CX::CX..p.$

Propos.n 5.a Theore.a

Dada una Parab.a, Hallar su Exe

Resoluz.n y demost.n

tirense dentro dela Parab.a Qualesq.a dos rectas Paral.s BH, CS, dividanse por medio en los puntos M, O: por estos tirese la Recta NK q.e sera diametro y por qualq.a punto K deella la perp.r RE dividase esta por medio en L y p.r L tirese LF paral.a a KN La qual sera el exe p.r dividir ala RE por medio en L: pues siendo todo diam.o paralelo al Exe, la RE q.e es perp.r al diam.o NK lo sera tamb.n al Exe y solo puede serlo FL que la divide por medio.

Si la Recta NK fuese perp.r a las BH CS entonzes dha NK seria el Exe

Propo.ⁿ 6.ª Theore.ª

La Superf.^e parab.^a PAH es los $\frac{2}{3}$ del Rectang.º Circunscripto PM

Demostraz.ⁿ

Tirada la Recta AH por qualq.ª pun to de ella, se tirara CL paralela al Se y la semiordenada HK: por lo qual siendo AM = RH y AE = KN seran pp.^s (p.^r 1.ª) ... $\overline{AM}^2 .. \overline{AE}^2 :: EL .. EN$
y siendo semej.^s los triangulos AEZ, AMH
sera altern.ª la prop.ⁿ $\overline{AM}^2 .. \overline{AE}^2 :: \overline{FL}^2 .. \overline{EZ}^2$.
pero p.^r la (C.15 del 5.º) $FL .. EN : \overline{EL}^2 : EN \times EL$
luego (C.11 del 5.º) $\overline{EL}^2 .. \overline{EZ}^2 :: \overline{EL}^2 .. EN \times EL$
Luego ..... $\overline{EZ}^2 = EN \times EL$ (14 del 5.º)
ó bien ..... $\overline{EZ}^2 = EN \times MH$.

Lo mismo se demostrara de todos los quadrados de todas las FZ paral.^s a la MH; y siendo las EZ y q.^s en numero a las EN se considera la AH divida en partes ynfinitam.^e pequeñas delas quales sea una $Ec = \overline{M}^{m}$ p.^d Sup.^r

sera todos los quad.^s EZ multip.^s por m, 1.^o 2.^o

A todos los Rectang.^s EN $\times$ m, multip.^s p.^d MH

pero todos los Elementos solid.^s EZ $\times$ m –

Componen la Piram.^e HSXMA cuia

base es el Quad.^a MS y la Altura

MA y todos los elementos Superfizia

les EN multip.^s p.^d m Componen el tri.^o

mixti.^o AHHM; Luego todas las EN

multiplicadas por MH Compondran el –

Prisma AHSXM, cuia base es el

triang.^o mixt.^o AHHM y alt.^a MX = MH

con q.^e siendo este Prisma ygual ala

Piramide sera AHHM $\times$ MH = $\frac{\overline{HM}^2 \times AM}{3}$

y part.^do todo por HM, quedara. . . - - -

. . . AHHM = $\frac{HM \times AM}{3}$.

esto es el tri.^o mixtil.^o la terz.^{de} parte

del Rectang.^o RM; luego la Super

fizie parab.^a ANHR sera los $\frac{2}{3}$ de

dicho Rectangulo; y toda la Superf.^e

PANK los $\frac{2}{3}$ del Rectang.º PM

Corolario.

Si se tira la Recta PM el triang.º PMK es ala Superf.e parabolica PMCH, como 3.. 4.

Corolario 2.º

Si se toma PV = $\frac{pr}{3}$ y se tira VM el triang.º VAR sera ygual ala Superf.e parab.ca PMR. por que el triangulo PAR es la mitad del Rect.º BR y el triang.º VPA es la sexta parte, luego los dos triang.s juntos seran los $\frac{4}{6}$ o bien los $\frac{2}{3}$ que es la Superf.e parabolica PMR.

De la Elipse.

Si aun Cono Recto le corta un plano HXFKZO perpend.r al triang.º por el Exe y que corte los dos lados de el AA, RV la region que forme HXFKZO es una Elipse: la Recta HK

(Comun Seccion de su plano (con el tri
angulo por el Exe) es su Exe maior
y es la maior Recta q.e se puede tirar
dentro dela Elipse, y si p.r su mitad
F se considera vn Seccion en el Cono
paral.a ala Base del dho la EZ comun
Seccion con la Elipse es el Exe menor
que Corta al maior en ang.s Rectos
como se demuestra del mismo modo
en la (def.n 3.a) dela Parabola; y lo
mismo sucede con qualq.a otra Co
mun Seccion XO dela Elipse y los Cir
culos paralelos ala Base del Cono.
Las Rectas XO perpend.s al Exe
maior DCK se llaman Ordenadas
â el, y sus mitades Semiordenadas
del mismo modo que en la Parab.a
El Exe Menor EZ que es la mas
pequêña recta, que se pueda, tirar
dentro dela Elipse, tiene tambien

sus aplicadas y son todas las pa
raletas al Exe Maior, à quien di
vide tamb.n por medio en Angulos
rectos: El punto A. en que se Cor
tan los dos Exes se llama Centro
dela Elipse, y todas las rectas
que se tiran por el Centro desta se
dizen Diametros; los que ygualm.te
tienen sus aplicadas, y se distinguen
delas delos Exes en que aunque
las divide por medio no es en angs.
rectos. todos los Diametros q.e reci
procam.te se dividen por medio se
llaman Conjugados, y asi los Exes
suelen tambien llamarse Exes Con
jugados.

Si al Exe Maior y al menor;
se busca una terzera proporcion.l,
esta sera el param.o del Exe maior
y param.o del Exe menor la terzera

proporz.ˡ a este y al Exe maior.

Scholio.

Quando el Cono es Escaleno y el plano que Corta los dos lados del triang.º por el Exe forma el ang.º AMX = RAF la Secciom se llama Sub contraria, y no es Elipse sino Circulo, por q.e Consider.º el plano PX paral.º ala Base del Cono, los triang.s POX, XOM seran semej.s por tener los ang.s en O yg.s y el ang.º M = P = A; luego seran proporz.

..... XO .. OP :: OX .. OM ... y (p.ª 76)

... XO × OM = OP × OX ... pero sien do SO perp.ª a PX como se ha demost.º es (13 del 6º) $\overline{SO}^2$ = PO × OX

Luego ... XO × OM = $\overline{SO}^2$. y demos trandose lo mismo con qualq.ª otra secc.n estaran todos los puntos S en la Circunf.ª de un Circulo que sera

HCMF.

Propos.^n 1.^a theore.^a

En la Elipse, los quad.^s de las se mi ordenadas al Exe son como los rectang.^s hechos de los segm.^s de él: esto es $HB \times BK .. \overline{BX}^2 :: HF \times FK : \overline{EF}^2$

demostraz.^n

Por la semej.^a de los triang.^s HBN HFL son prop.^s $HB .. BN :: HF .. FL$ y p.^r la de los tri.^s KBP KFM son tamb.^n pp.^s $BK : BP :: FK .. FM$

y mult.^{do} las dos prop.^{es} sera $HB \times BK : HB \times BP :: HF \times FK .. LF \times FM$

pero C13 del 6.^o $HB \times BP = \overline{BX}^2$

$$LF \times FM = \overline{EF}^2$$

Pero pon.^o los quad.^s en lugar de los rectang.^s sera $HB \times BK .. \overline{BX}^2 :: HF \times FK .. \overline{EF}^2$ que era lo que se avia de demostrar. esto es los rectang.^s de los segm.^s del exe como los quadrados de las semiorden.^{as}

Corolario 1.°

El rectang.° hecho de los segmentos del Exe maior, es al Quad.° de la semiordenada correspond.te como el quadr.° del Exe maior al Quadr.° del Exe menor: esto es $HB \times BK \,..\, \overline{BX}^2 :: \overline{HK}^2 \,..\, \overline{EZ}^2$ por que siendo $HB \times BK \,..\, \overline{BX}^2 :: HF \times FK \,..\, \overline{FF}^2$ y tambien sup.to q.e HF es ygual á FK $HF \times FK = \overline{HF}^2 \,..\, \overline{FF}^2 :: \overline{HK}^2 \,..\, \overline{EZ}^2$ (15 del 5.°) sera (11 del 5.°) $HB \times BK \,..\, \overline{BX}^2 :: \overline{HK}^2 \,..\, EZ$ que es lo que se avia de demostrar.

Corolario 2.°

Dados los Exes de una Elipse, se puede describir esta Curva del modo siguiente: sea el Exe maior AB y el menor HK describase sobre el maior el Circ.° ALB prolonguese el Exe menor hasta L, y tirense paral.s al las PS, HK &c.a

alas CL, CR, y PS hallese vna-
quarta prop.l PX y el punto X esta-
ria en el Elipse: del mismo alas
CL, CR y TK, hallese la quarta pro
porcional TZ, y el punto Z estara-
tambien en la Elipse: finalmente
hallando deste modo las quartas-
proporzionales en las paral.s al Exe
menor, se tendran todos los puntos
que se quieran p.a formar la Elipse:
La razon es porque siendo CL..CR
:: PS..PX sera tamb.n $\overline{CL}^2..\overline{CR}^2$ ::
$\overline{PS}^2..\overline{PX}^2$. pero $\overline{CR}^2 = AC \times CB$ por
ser radio, y $\overline{PS}^2 = AP \times PB$ (13 del 6.°)
luego por la 7.a sera..$AC \times CB..\overline{CR}^2$::
$AP \times PB..\overline{PX}^2$ y demostrandose lo mismo
de todas las demas paral.s al Exe,
se sigue que los puntos X, Z, Y, &a. estan
en la Elipse.

Escholio.

tambien si qualq.^r Cilindro se Corta por vn plano perpend.^r al Paralelogr.^o ó rectang.^o, por el Exe, que no sea paralelo á este; la seccion q.^e forme será tambien vna Elipse, lo q.^e se demuestra del mismo modo que en el Cono.

Propos.^n 2.^a Problema

Dado el Centro de vna Elipse; hallar sus Exes.

Resoluzion

Con el Centro C de la Elipse, des cruzase vn arco FS que la Corte en dos puntos F, y S, tirese la recta FS y dividiendola por medio en O tirese la SO que prolongada vna y otra parte será vno de los Exes AR, y tirando perpend.^r a el por el Centro la SE será el otro Exe.

Consta delo dho porque solos los

deven de cortar perpendicularmente y de todos los Diametros son los Mi cos que dividen a sus aplicadas por medio y en angulos Rectos.

Propo.n 3.a Probl.a

Dada una Elipse; hallar su Centro.

Resoluzion.

tirense dentro dela Elipse dos Rectas qualesq.a MR, NK paraq.s dividan se por medio enlos puntos S, O, y tir.do por estos la Recta AB sera diamet.o la qual dividida por medio en C dara el Centro, porq.e todos los diamet.s como se ha dicho pasan p.r el Centro y se dividen en el en dos partes yg.s

Propo.n 4.a Probl.a

Dado enla Elipse un punto R y un diametro AB, tirar aeste una apli cada por el punto dado.

Resoluz.ⁿ

tirese la Recta RA y cortando AF. yqual AR tirese FM paral.ª al dia metro AB conlo qual tir.º RM se ten dra la aplicada al diametro AB. por q.e siendo p.r razon delas paralel.s propor.s RA.. AF:: RS.. SM sera RS = SM por q.e averse cortado RA = AF, luego la RM es aplicada al diametro AB porque este la divi de por medio en S.

Si por un punto P del diam.º AB se quisiese tirar aeste una aplicada, se ti rara prim.º por un punto qualq.ª M dela Elipse la aplicada MR y tirando p.r P una paral.ª a esta se tendra la apli cada corresponde.e RK.

Definizion A.ª

tangente ala Elipse, es la Recta que tocandola en un punto no la Corta

Propos.n 5.ª Pract.ª

Dado un punto en la Elipse tirar por el una tangente.

Resoluzion.

Al punto dado A tirese el diam.º AB con una aplicada qualq.ª AR, RM tir.do por A, AP paral.ª a RM sera la tangente que se pide.

Demostraz.n

Si alg.ª parte de la Recta AP, cayese dentro de la Elipse la dividiria su diametro AB en dos partes yguales; y esto deberá ser en el punto A; pero esto es ymposible por estar este punto en la Elipse, luego toda la AP cae fuera de ella y por consig.te es tangente.

Escholio.

Si desde punto qualq.ª P de la tangente PA se tira el diametro MK prolongado y la AM aplicada a el seran CE, CM, y CE

Continua es propoenz. con cuia propiedad (que no se demuestra) por ser mui larga) si se quisiese tirar desde punto S una tangente se tirara la SK por el Centro X, ~~y luego la XK aplicada al diam.º~~ ~~MK~~) X con lo qual a las rectas CP y CM se hallara una tercera proporcional PH y tirando por H la aplicada AH determinara el punto A al qual tirando la SA se tendra la tangente.

~ ~ Definizion 6.ª ~ ~

focus, ò Polos dela ~~Elipse~~ son dos puntos F, y S colocados en el ~~Exe~~ mayor AB ygualmente distantes del Centro, y dispuestos de tal modo que tiradas de ellos a qualq.ª extremo N del ~~Exe~~ menor las rectas NF, SN sean yguales entre si, y las dos juntas ygs.^s al exe maior AB.

Corolario.

Para hallar los focus F y P se Bus
caran los Exes AB, MM y tomando
la mitad del Exe maior se Contaran
en el desde M los puntos F y P los qua
les seg.n lo dicho seran los focus dela
Elipse.

Escholio.

Entre las maravillosas propiedades
del focus; una dellas es que tiradas
desde ellos a un punto qualq.a S dela
Elipse las FR, PR estas dos Juntas
son yg.s al Exe Mayor AB; y desta
propiedad se ynfiere la descripcion de
la Elipse dado el Exe maior y sus fo-
cus, que es como se sigue.

Modo 1.o

Sea dado el Exe maior AB y los fo-
cus F y P, dividase AB en diferen.s
puntos S, H &a; y haziendo Centro en los
focus con las partes AS y SB hagase

hazare la yntesecn. X; con las AX, y XB la yntersecn. Z y asi delos demas puntos; con lo qual pasando por los puntos A, X, Z, &a. vna Curva se tendra el Elipse.

Modo 2o.

tomese vn Hilo FRP ygual al Exe mayor AB y fixando sus estremos en los focus F y P se tomara vn Lapiz, o punta de compas R el qual llevando sîpre tirante el hilo y moviendolo al rededor de los focus descrivira la Elipse AXBM por que qualquier punto R en que se halle el Lapiz siempre las dos partes del hilo FR, PR seran juntas yguales al Exe maior AB. Esta practica es mui frequente sobre terreno, para hazer la montea, ô Delineazn. delas roscas ô Arcos Rebajados, que se llaman aquella de Cordel, delo qual se hablara en la Architectura.

Escholio. 2.°

Otra Propiedad delos focus es que si una recta HK es tangente ala Elipse en el Punto R, y a este se tiran des delos focus las FR, FR, los ang.s PRK, FRH son yg.s y esta es la razon por que un Cuerpo luminoso puesto en el focus F haze todas sus reflex.s al otro focus P, y es por que el ang.° deyncidencia es ygual al de reflex.n Como se demostrara en la Cathoctrica.

Propo.n 6.a theore.a

Si sobre el Exe Mayor AB de la Elipse se describe un Arc.° como diametro, y otro sobre el Exe menor seran la superf.e del Arculo maior, la dela Elypse y la del Circ.° menor continuas propor.s dela razon del Exe maior al menor

Demostracion

Concivase la superficie del Circulo mayor compuesta, ó dividida de una infinidad de elementos SK, MR paralelos al Exe menor, y siendo pp.s CL, CH:: SK. SO:: MR. MZ &a. seran por la (12 del 5°) todos los elementos que componen la Superf.e del Circ.o a todos los que componen la de la Elipse:: CL, a CH: ó bien como 2CL = AB .. 2CH = HJ. Considerando tamb.n en la Elipse y el Circulo menor los elementos DX, ZF paral.s al Exe 7AB seran tamb.n pp.s CB.. CV:: DX.. DG:: ZF.. ZT. y tambien por la (12 del 5°) todos los Elem.s que componen la superf.e de la Elipse, a todos los que componen la del Circulo como CB: CV ó bien como el Exe 7 al L: y ten.do esta misma razon (seg.n se ha demost.o)

la superf.e del Circ.o 7 ala dela -
Elipse, se sigue que las tres su-
perf.s dhas son Continuas pp.s
en la razon del Exe 7 al L.

Corolario

Si entre el Exe maior AB, y el
menor HI se busca una media
proporcional SJ, se tendra el diam.o
de un Circulo ygual ala Elipse, por
siendo AB, JS, HI Continuas pp.
sera $\overline{AB}^2 .. \overline{JS}^2 :: AB .. HI$
Luego el Circ.o del Exe 7 ala Elip
se como $\overline{AB}^2 .. \overline{JS}^2$. pero los Cir
culos son como los Quad.s delos dia
metros (pr.n 2.a del 12) luego el Cir
culo del Exe 7 tiene la misma raz.n
ala Elipse que al Circ.o cuio diam.o
es JS y por consig.e este Circ.o y la
Elipse seran yguales.

De la Hiperbole.

definiziones.

1.a

Si a un Cono SBX se corta un Plano PLSMR perpendicular al triang.° por el Exe, de modo que su comun seccion con este RD prolongada, corte al otro lado XB tamb.n prolonga do la seccion PLDMR que d.ho plano forma ~~con~~ en el Cono se llama Hiperb.a la Recta DA se dize Exe prim.° o Exe traverso y en qualq.r Hiperbola es siempre constante; la Recta BA que divide, y es ta dividida por medio, y en ang.s rectos con la DA en el pun to C, se llama segundo Exe, o Exe Conjugado y es tamb.n constante. Quando los dos Exes DF, AB son

yguales, se llama la Hiperbola Equi
latera, y en todos casos el punto C
se dize Centro de la Hiperbola; el pun
to D vertize, la DE eje yndetermi
nado, y las DO, ME abscisas, y
~~las~~ ordenadas como en la Parabola
y a las ultimas las divide por medio
en angulos rectos el Exe Yndeter-
minado (Cuia demostraz.n es la
misma que se dio para la Parab.a

Definizion 2.a

Si dos Conos opuestos SXB, ZBV
son cortados por un mismo plano.te
resultaran dos Hiperbolas opuestas
RDP, EFT las quales tendran los
mismos Exes DFAB y el Centro
comun C. -~~-

Definizion 3.a

Si al primer Exe DF, y al seg.do
AB se busca una terz.a proporz.l

se tendra el param.º del primer Exe, y si la terz.ª pp.l se busca al Exe segundo y al prim.º sera el parametro del seg.º Exe.

Propos.n 5.ª Theor.ª

En la Hiperbola son proporzion.s el Quad.º del primer Exe, al del segundo, como el Rectang.º hecho de la comp.ª del primer Exe y la abscisa en la misma Abscisa, al Quadr.º de la Corresp.te semiorden.da esto es $\overline{DA}^2 . . \overline{BA}^2 :: AO \times DO . . \overline{LO}^2$

Demostraz.n

Conzedida la seccion Ele paral.ª ala base del Cono en los triang.s semejantes ACB, AOE seran proporc.s AC . . CB :: AO . . OE y en los otros triang.s CDB, GDO tamb.n semej.s seran . . CD . . CB :: DO . . OG y multiplic.do las dos proporz.s se tendra

$FC..CB^2 :: FO\times DO..OX\times OG.$

pero (13 del 6.°) $OX\times OG = \overline{LO}^2$

Luego $\overline{FC}^2..\overline{CB}^2 :: FO\times DO..\overline{LO}^2$

ó bien.. $\overline{FD}^2..\overline{BA}^2 :: FO\times DO..\overline{LO}^2.$

Corolario 1.°

Siendo esta Hiperb.ª Equilatera $FB = BA$ será $FO\times DO = \overline{LO}^2.$

Corolario 2.°

Siendo tamb.n $FO\times DO..\overline{OL}^2 :: \overline{FD}^2..\overline{BA}^2$

y $FL\times DK..\overline{PK}^2 :: \overline{FD}^2..\overline{BA}^2$

será (11 del 5.°) $\underline{FO\times DO} = \overline{FD}^2 + \overline{BA}$

y así $FO\times DO..\overline{OL}^2 :: FK\times DK..\overline{PK}^2$

esto es los Quadrados de las semiordenadas en la Hiperbola son como los rectangulos hechos de las abcisas en las Compuest.as dellas y el Exe transverso.

Corolario 3.°

Si se quiere describir la Hiperb.ª se tiran dos rectas PH. LK que se corten en angs. Rectos y tomando el punto C por Centro se determinaran anticipadamte. los dos Exes AB, LK y deseriv.do varios semicirculos con qualesq.s mayores que Ct y con el Centro C se levantara sobre AB la perpendicular. BR que cortara à todos los semicirc en los puntos O, M, &a. y buscando una quarta proporz.l a las AB, LK, BO que supongo sea EX se levantara perpendicular en E; el punto X estara en la Hiperbola. Determin.do de este modo las perp.s FV, QZ, &a. se tendran puntos por los quales pasando una Curba se tendra la Hyperbola: porque siendo... AB .. LK :: BO .. EX.

sera..... $\overline{AB}^2 .. \overline{LK}^2 :: \overline{BO}^2 .. \overline{EX}^2$.

Pero..... $\overline{BO}^2 = \overline{AE} \times BE$.

Luego..... $\overline{AB}^2 .. \overline{LK}^2 :: AE \times BE .. \overline{EX}^2$.

Lo mismo se demuestra para todos los demas puntos, V, Z, &a. luego la Curva BZ es una Hiperbola. y si se determinan del mismo modo los puntos x, v, z, de la otra parte, y se describe la Curva, se determinan las dos Hyperbolas opuestas, cuios exes comunes seran AB, y LK y el Centro sera C.

Definizion 1.a

Si por el Vertize A se tira DL paral.a é igual al Exe Conjugado EF: esto es de modo que sea Ag.e DL esta divida p.r medio en A y p.r el Centro C, y los puntos DL se tiran las Rectas CH, CR determinadas estas se llaman asintotas cuyas propiedades son maravillosas y una de ellas es que acercandose mas y mas ala Hyperbola nunca puede concurrir con ella.

La demostrazion desta Propiedad se funda en la Propozn. siguiente.

Propozn. 2a. theorema.

Si en la Hyperbola se prolonga qualquier ordenada MK hasta cortar las Asymptotas, sera .. $\overline{RP}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{DA}^2$

Demostrazn.

Sea .. $CA=a$. $AD=b$. la abscisa $AP=x$ la semiordenada $MP=y$. y $RM=z$. sera por la semejanza de los triang. CAD, CPR; $a..b::a+x..y+z$.. o bien .. $a^2..b^2::a^2+2ax+xx : yy+2yz+zz$ y por consiguiente $yy+2yz+zz :: \frac{a^2b^2+2b^2ax+b^2xx}{a^2}$ tambn. por la prop. de la Hyperba. son pp. .. $a^2..b^2..2ax+xx..yy$.

Luego... $yy=\frac{2b^2ax+b^2xx}{a^2}$ cuio valor substituido en la equazn. (A) dara .. $\frac{2b^2ax+b^2xx}{a^2}+2yz+zz=\frac{a^2b^2+2b^2ax+b^2x^2}{a^2}$ que reducido es .. $2yz+zz=\frac{a^2b^2}{a^2}=bb$.

pero $2yz+zz$ es ygl. $\overline{y+z}^2 - yy = \overline{RP}^2 - \overline{MP}^2$
luego. &a.

Corolario.

De aqui se infiere lo que se ha dicho de las Asimptotas. por que siendo en qualqr. punto de la Hypta. $\overline{RP}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{DA}^2$ el punto M nunca puede juntarse con el punto R, por que si suzediese seria $\overline{RP}^2 - \overline{MP}^2 = 0$ y en este Caso $\overline{DA}^2$ tambn. ygl. Cero pero esto es ympossible: luego la Asymptota se que se acerca continuame. a la Hiperba. nunca puede Concurrir con ella.

Corolario 2º.

Siendo $\overline{RP}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{DA}^2$.
y tambn. $\overline{PH}^2 - PK = DA$.
sera $\overline{RP}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{PH}^2 - PK$.
y pr. consiguie. $RP = PH$.
y quito. las ygles. MP y PK quedara

$RM = HK$ con lo qual sera $MH = 2y+z$. y por consig.e $RM \times MH = 2yz+zz$: pero por lo demostrado es $2yz+zz = \overline{RP}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{DA}^2$ luego $RM \times MH$. ò bien $RK \times KH = \overline{DA}^2$

Corolario 3.º

Si se tira una Recta qualq.a KO paralela ala RH sera $KS \times SO = RM \times MH$; por ser uno y otro Rectangulo ygual, à $\overline{DA}^2$.

Corolario 4.º

Si se tira de qualq.r modo entre las Asymptotas una Recta QV que corte ala Hyperbola sera siempre la $QX = KV$ porque tirando por X y K, las ordenadas prolongadas SO, RH siendo p.r lo demost.º $SX \times XO = RK \times KH$ seran prop.s $RK \ldots SX :: XO \ldots KH$ tambien son proporc.s p.r los triang.s semejan.s RKQ, $SXQ \ldots \ldots RK \ldots SX :: KQ \ldots XQ$.

por los triangulos semejes. XOV, KHV.
sera .... XO..KH :: XV..KV.
luego (11 del 5°)... KQ..XQ :: XV..KV.
y divid°: ...... KQ–XQ..XQ :: XV–KV..KV.
esto es .... KX..XQ :: KX..KV.
luego .... QX = KV.

Quando los puntos X, y K coyn-
ciden: esto es, que la Recta es tan
gente, como NO estara dividida
por medio en el punto del Contacto T.

Definizion 5.ª

Si del Centro C. se tira una Recta
CF que Corte ala Hyperbola, se
llama Diametro: el qual tiene tam
bien sus aplicadas, que son para
lelas ala tang.e NO y las divide tan
bien por medio, por que si QV q.e
es paral.a a RO, siendo RT = RO
sera QE = EV pero p.r el (Cor.° 4°)
Q = KV: luego RE = EK.

Definiz.n 6.a

Si en el Vertize A se levanta la perp.r AR ygl. ala mitad del Exe Conjugado y se cortan CH y CK yguales a CR se tendran los focus HK delas Hyperb.s propuestas

Propos.n 3.a theore.a

Si de los focus H y K se tiran rectas HP, KP a qualq.a punto P dela Hiperb.a sera siempre PK − PH ygual al Exe traverso AB.

demostraz.n

Sea el semiexe traverso $AC = a$. $AR = CF = b$. $CM = x$ sera $CH = CR = \sqrt{aa+bb}$. $AM = x - a$. $BM = x + a$ sea tamb.n $\sqrt{aa+bb} = p$. sera $MK = x+p$ y $MH = x - p$: y p.r consig.e sera $\overline{MK}^2 = xx + 2px + pp$. y $\overline{MH}^2 = xx - 2px + pp$ por la prop.d dela Hiperb.a son proporz.s

$$\overline{CA}^2 : \overline{CF}^2 :: BM \times AM : \overline{MP}^2$$

$$aa . . bb :: xx - aa . . \overline{MP}^2$$

Luego $\overline{MP}^2 = \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$.

y subst.do en esta Equaz.n en lugar de b^2

su yg.l $pp - a$ (por ser $aa+bb=pp$)

se tendra $\overline{MP}^2 = ppxx - aaxx - ppaa + a^a$

ó bien reduz.º $\overline{MP}^2 = \frac{ppxx}{aa} - xx - pp + aa$

añad.º á este quad.º el de MK (y quit.do

los term.s que se destruyen se tendra

$\frac{ppxx}{aa} + 2px + aa = \overline{MP}^2 + \overline{MK}^2 = \overline{KP}^2$.

y sacando la Raiz se tendra $KP = \frac{px}{a} + a$

$= \frac{C\mathcal{H} \times CM}{CA} + CA$.

Del mismo modo sumando

$\overline{MP}^2$ con $\overline{M\mathcal{H}}^2$ se tendra reduz.s los term.s

$\frac{ppxx}{aa} - 2px + aa = \overline{MP}^2 + \overline{M\mathcal{H}}^2 = \overline{P\mathcal{H}}^2$

y sacando la Raiz sera $P\mathcal{H} = \frac{px}{a} - a =$

$\frac{C\mathcal{H} \times CM}{CA} - CA$. y restando $P\mathcal{H}$ de

PK sera la difer.a $= 2a =$ al Exe transverso AB.

Corolario 5.

Si el punto M coyncidiere con el punto

$\mathcal{H}$: esto es q.e fuese $CM = C\mathcal{H}$. sera

$PH = \frac{\overline{CH}^2}{CA} - CA$. y por^o en lugar de CH y CA sus Valores se tendria $PH = \frac{aa+bb}{a} - a = \frac{bb}{a}$: esto es la semiordenada en el focus yqual ala mitad del Parametro.

Corolario 2.°

Puede describirse la Hyperbola con gran facilidad del modo siguiente.

Sea el ~~Exe~~ transverso.. AB }
y los focus . . . . H. y F. }

Con la distancia AB haziendo Centro en F. cortese la FH en el punto. Δ. y con qualesq.^a yntersv.^s maiores q^e F.Δ. describanse Varios Circ.^s Con el mismo Centro, que cortaran al ~~Exe~~ prolongado AB, en los puntos 3.5.6. &^a tomese la distancia 3.Δ. y haziendo Centro en el focus H, cortese el Circ.^o RS en los puntos XX. Con la distancia 5.Δ. y el mismo Centro H

Cortese el Circ.º PM en los puntos ZZ,
y contin.º de este modo la operac.ⁿ se
cortaran todos los demas Circulos
con lo qual pas.º una Curva por los
puntos determin.s se tendra la Hypere
por q.e por la Construccion, la difer.ª
entre las dos rectas tiradas en los
focus á qualq.ª punto de los deter
minados es siempre ygual al Exe
traverso AB.

Corolario 3.º

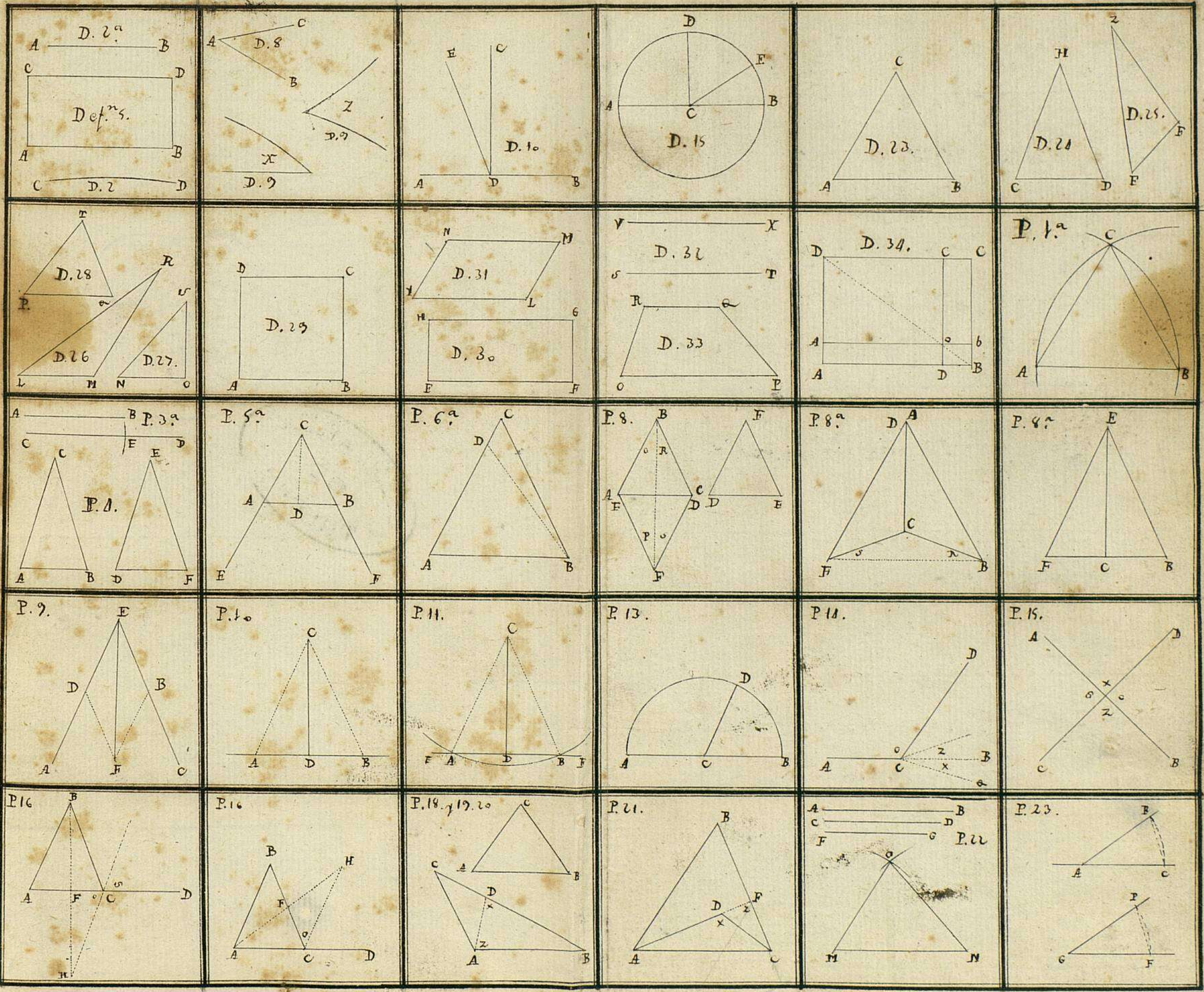
Puede tamb.ⁿ describirse la Hyper
bola al modo que la parab.ª por su
movim.º continuo, y aun con mas fa
cilidad fixando una regla qualq.ª
en el punto F. que se consideraria
como focus, y determ.º el Exe trav.º
AB y el otro focus H, se tomara un
Hilo ygual a RO difer.ª entre la re-
gla y el Exe traverso AB: exe-

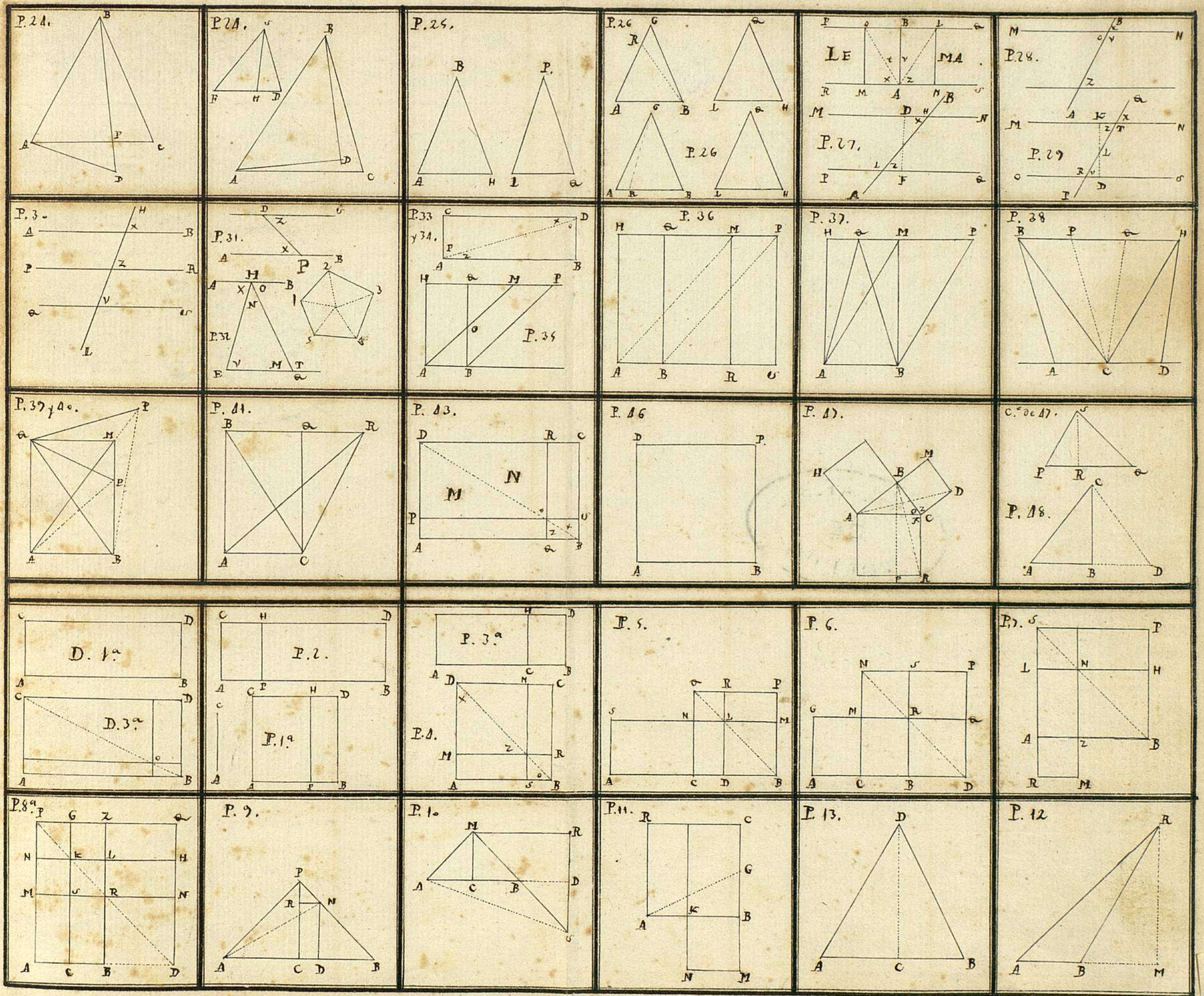
hilo se fixará en el extr.º R dela Re-
gla y en el Focus H, y estando la Reg.ª
libre para moverse con el Centro F,
se tomará un lapiz, ó punta de Com-
pas M, para tener el Hilo siempre
tirante, y pegado ala Regla, la qual
acercandose al Exe AB determinará
la Hyperbola. ~ ~.

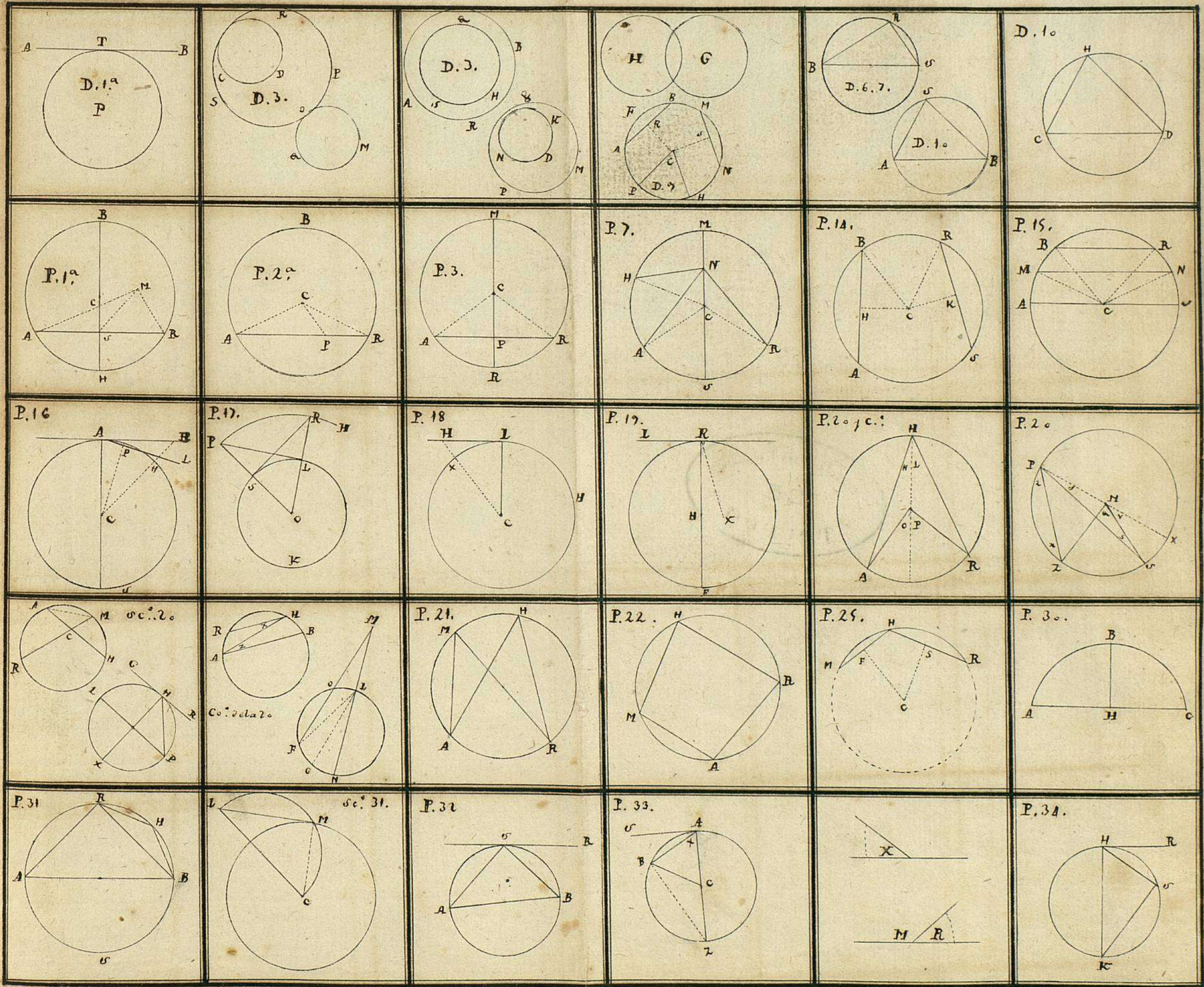
Definizion 7.ª

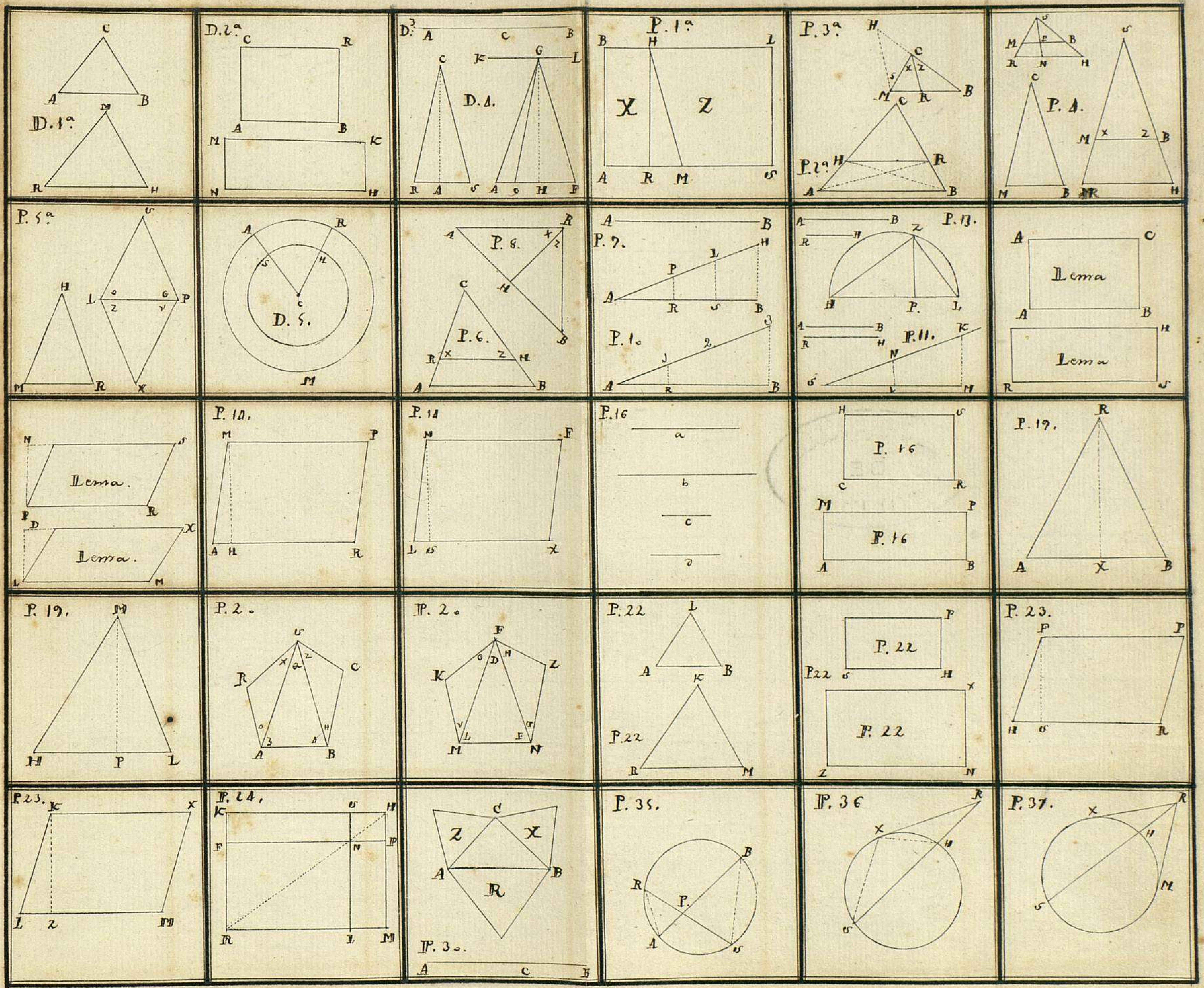
Si se tira por el Vertize A, la rec-
ta AR paral.ª ala Asymptota CS.
será CR = RA; por que siendo propor.
SA. AK : CR. RK y siendo tam-
bien SA = AK será CR = RK pero
AR = RK por ser el triang.º ARK
ysoceles luego AR = CR. el quad.º
dela recta AR, o dela mitad de CK
se llama potencia dela Hyperbola
y la CR lado de dicha Potencia. ~

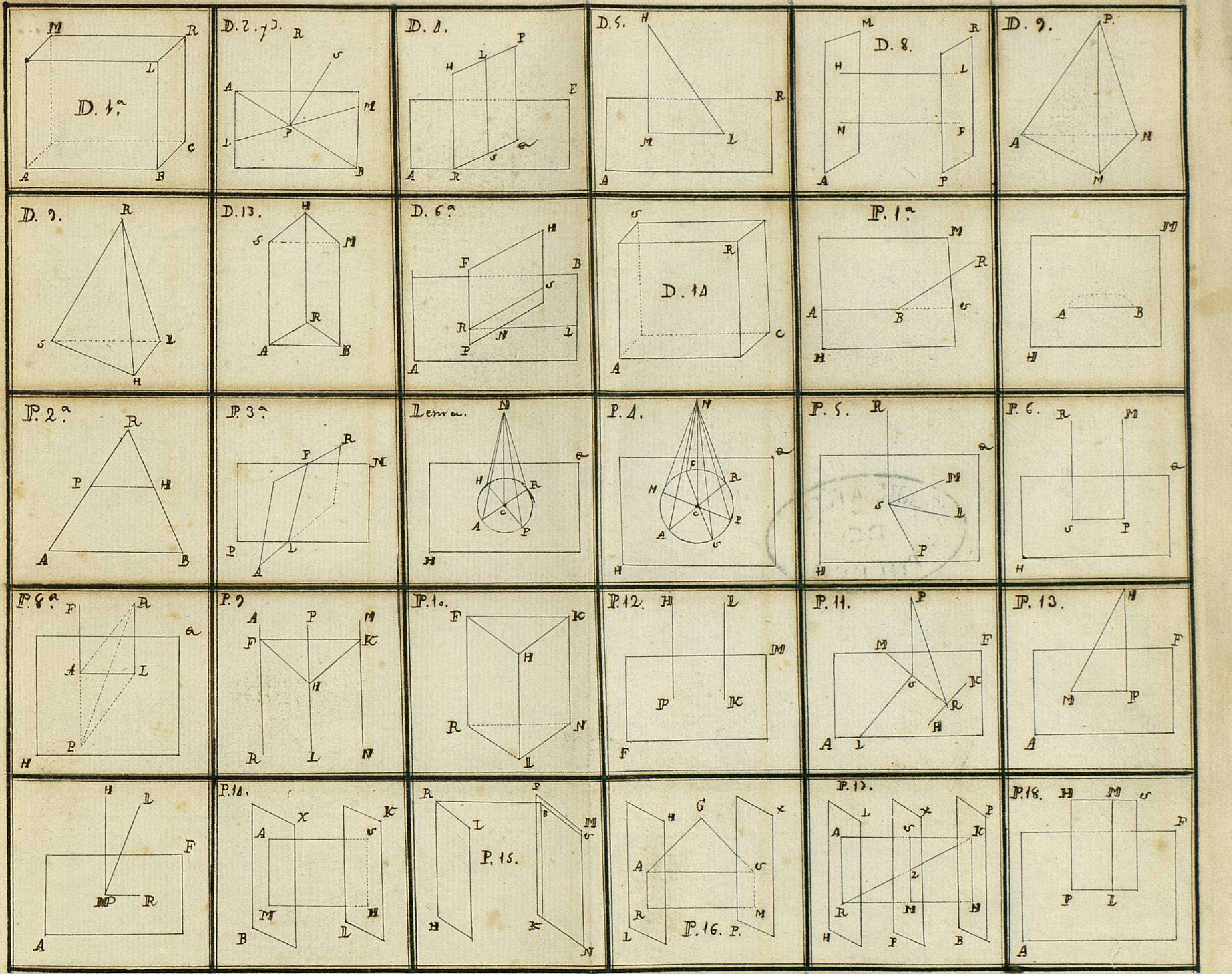
FIN DE LAS SECZS. CONICAS.

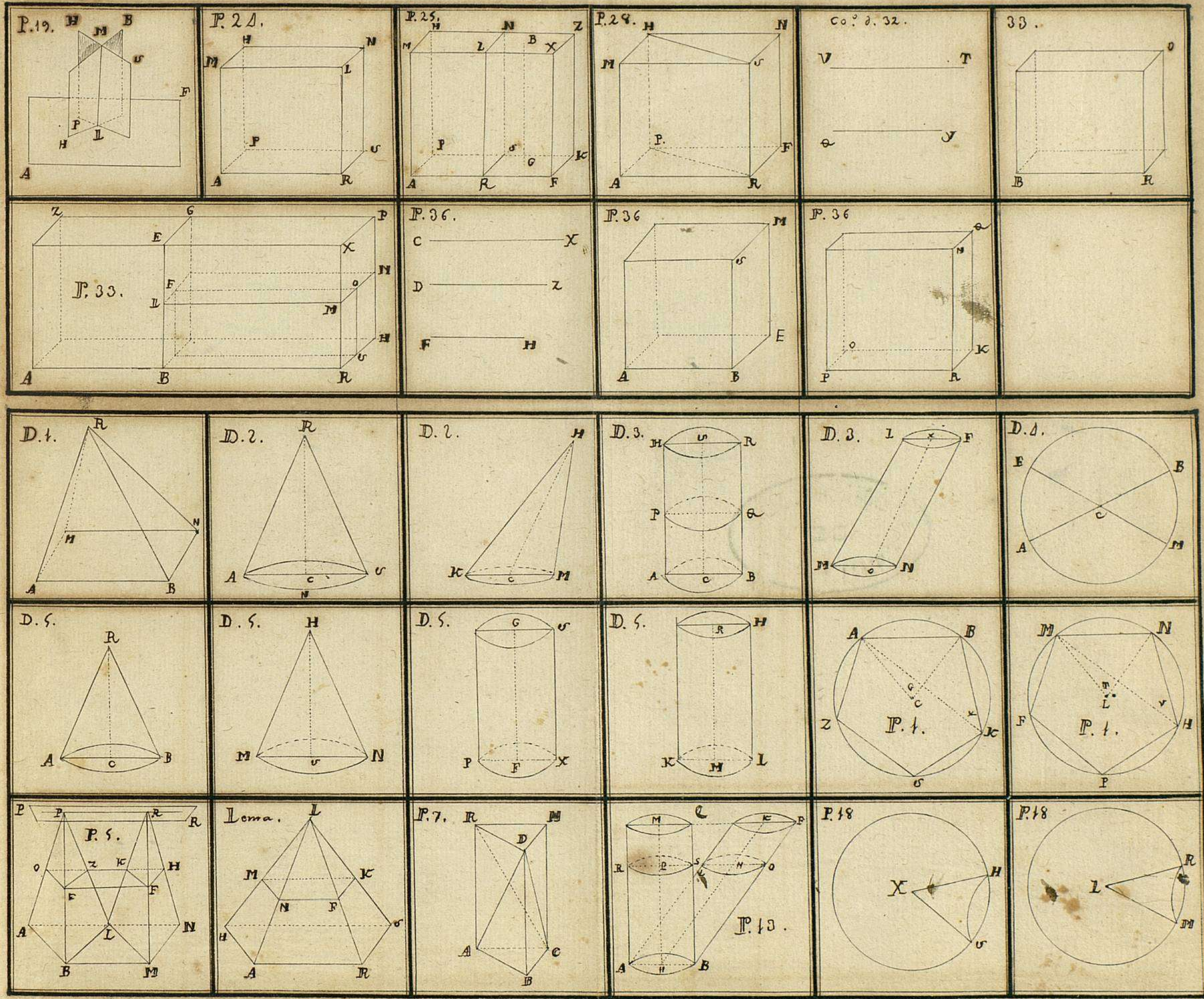

D. 2.ª
Def.ns 5.
D. 2
D. 8
D. 9
D. 10
D. 15
D. 23.
D. 24
D. 25.
D. 28
D. 26
D. 27.
D. 29
D. 31
D. 30
D. 32
D. 33
D. 34.
P. 1.ª
P. 3.ª
P. 4.
P. 5.ª
P. 6.ª
P. 8.
P. 8.ª
P. 9.
P. 10
P. 11.
P. 13.
P. 14.
P. 15.
P 16
P. 16
P. 18. y 19. 20
P. 21.
P. 22
P. 23.


P. 24.
P. 24.
P. 25.
P. 26
P. 26
LEMA.
P. 27.
P. 28.
P. 29
P. 30
P. 31.
P. 32
P. 33 y 34.
P. 35
P. 36
P. 37.
P. 38
P. 39 y 40.
P. 41.
P. 43.
P. 46
P. 47.
C.º de 47.
P. 48.
D. 1.ª
D. 3.ª
P. 2.
P. 1.ª
P. 3.ª
P. 4.
P. 5.
P. 6.
P. 7.
P. 8.ª
P. 9.
P. 10
P. 11.
P. 13.
P. 12

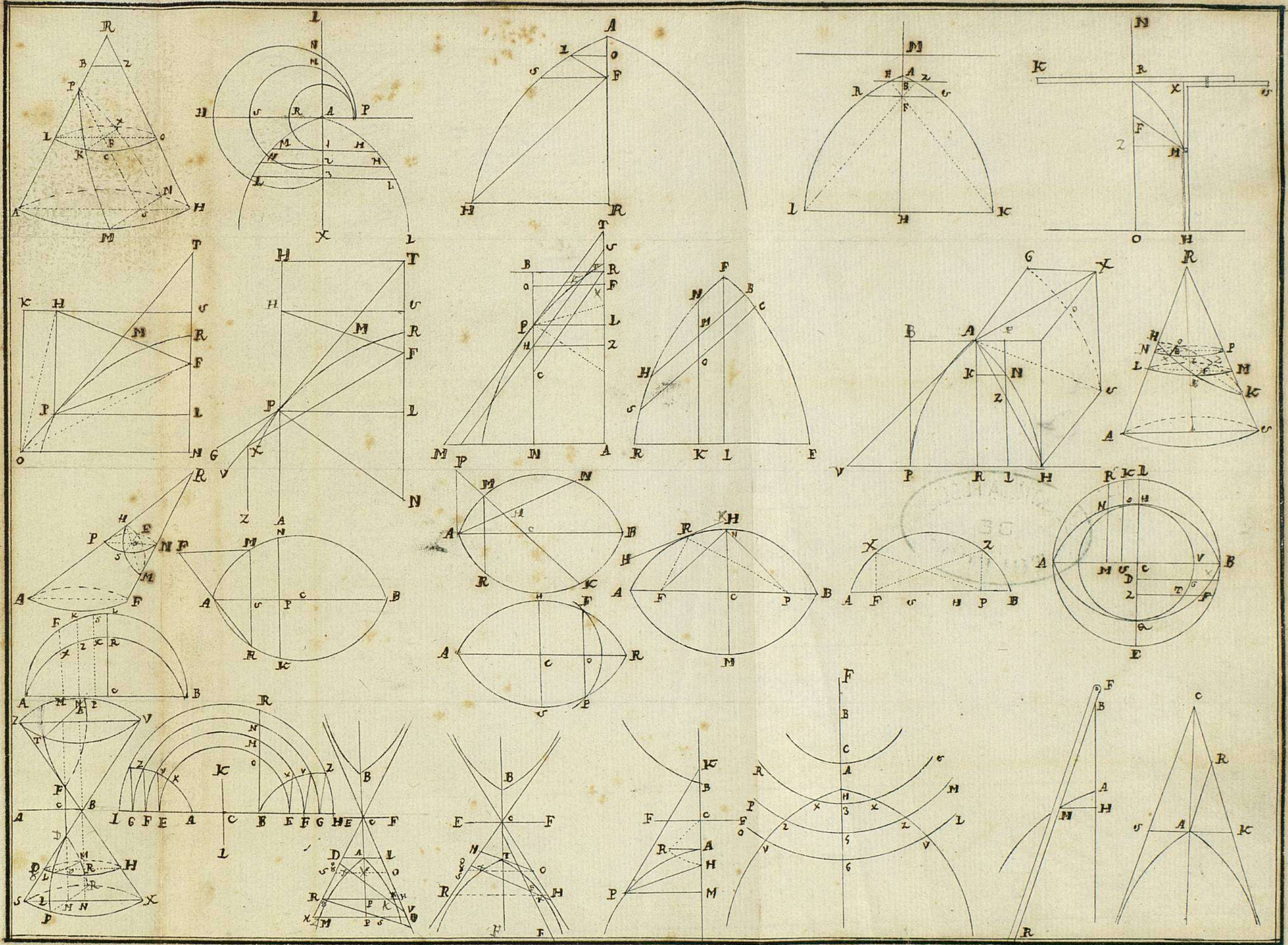

D.1.ª
D.3.
D.3.
D.6.7.
D.10
D.10
D.7
P.1.ª
P.2.ª
P.3.
P.7.
P.14.
P.15.
P.16
P.17.
P.18
P.19.
P.20 y c.:
P.20
sc.º 20
Co.º de la 20
P.21.
P.22.
P.25.
P.30.
P.31
sc.º 31.
P.32
P.33.
P.34.

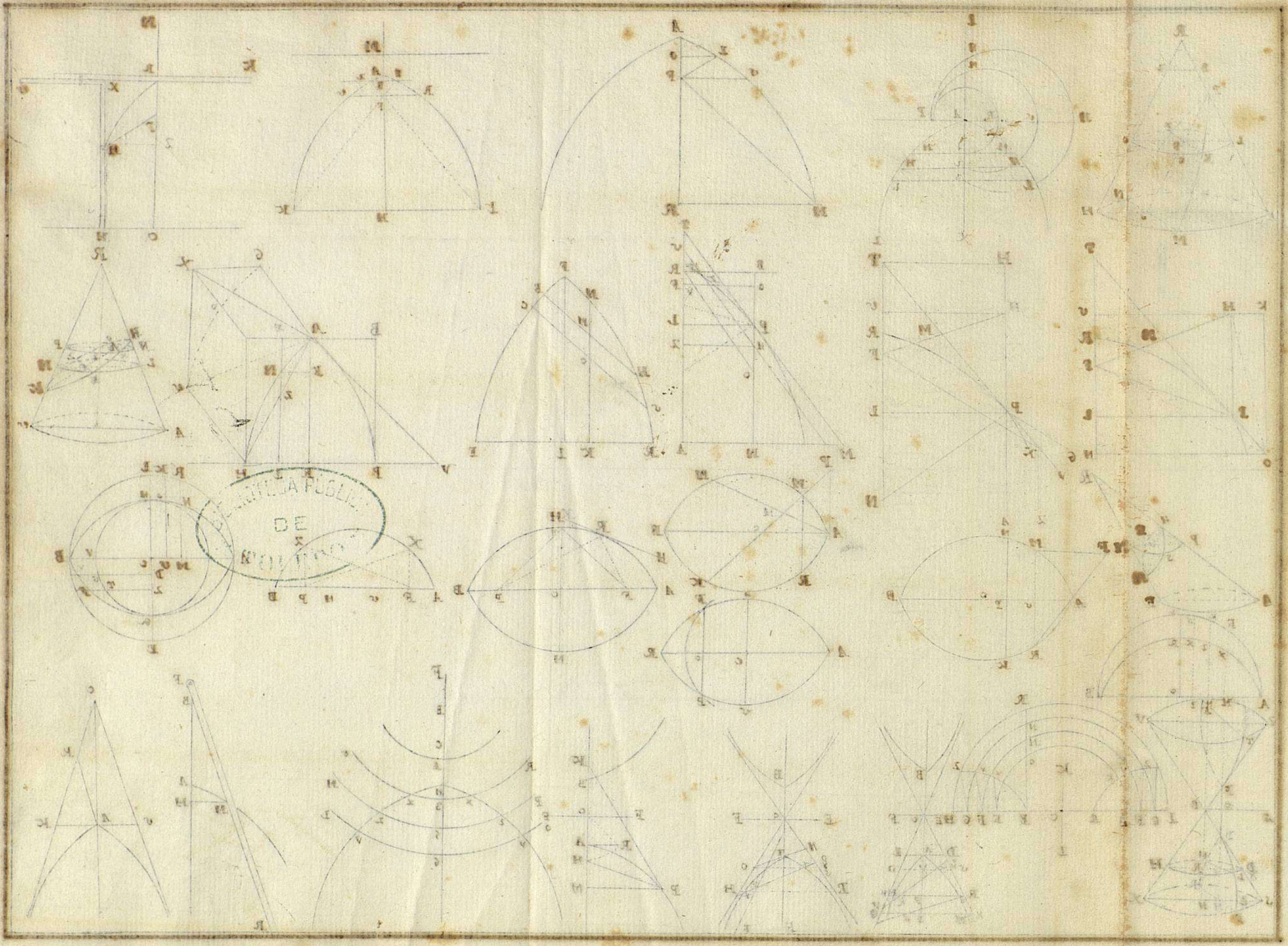

D. 1ª
D. 2ª
D. 3
D. 4
P. 1ª
P. 3ª
P. 2ª
P. 4
P. 5ª
D. 5
P. 8
P. 6
P. 7
P. 13
P. 11
Lema
Lema
Lema.
Lema.
P. 14
P. 14
P. 16
P. 16
P. 16
P. 19
P. 19
P. 22
P. 22
P. 22
P. 22
P. 23
P. 23
P. 24
P. 30
P. 35
P. 36
P. 37


D. 1.a
D. 2 y 3.
D. 4.
D. 5.
D. 8.
D. 9.
D. 9.
D. 13.
D. 6.a
D. 14
P. 1.a
P. 2.a
P. 3.a
Lema.
P. 4.
P. 5.
P. 6.
P. 8.a
P. 9
P. 10.
P. 12.
P. 11.
P. 13.
P. 14.
P. 15.
P. 16. P.
P. 17.
P. 18.



P. 19.
P. 24.
P. 25.
P. 28.
Co.° d. 32.
33.
P. 33.
P. 36.
P. 36
P. 36
D. 1.
D. 2.
D. 2.
D. 3.
D. 3.
D. 4.
D. 5.
D. 5.
D. 5.
D. 5.
P. 1.
P. 1.
P. 5.
Lema.
P. 7.
P. 13.
P. 18
P. 18





8

Tratado 2.º Geometria Especul